第六章 平面向量及其应用

6.1 平面向量的概念

6.1.1 向量的实际背景与概念+

6.1.2 向量的几何表示+

6.1.3 相等向量与共线向量

对点上分

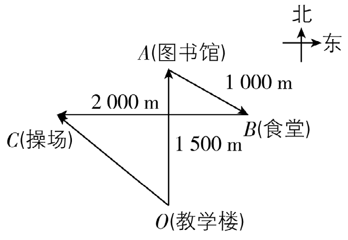
1. D 【解析】因为向量是既有大小又有方向的量,而高度、路程、频率都只有大小没有方向,弹力既有大小又有方向,所以弹力是向量. **故选** D.

提示:向量有大小和方向

2. D 【解析】由向量的几何表示知,$\boldsymbol{a}$ 也可以用 $\overrightarrow{MN}$ 表示,$\boldsymbol{a}$ 的起点为 M,终点为 N,方向是由 M 指向 N,**故** A,B,C **正确**,D **错误**.

3. C 【解析】零向量的模为 0,不是正实数,**故** A **错误**;模为 1 个单位长度的向量叫单位向量,**故** C **正确**;向量是既有大小又有方向的量,不是实数,**故** B,D **错误**.

4. 【解】如图所示,向量 $\overrightarrow{OA}$ 表示从教学楼到图书馆的位移;向量 $\overrightarrow{AB}$ 表示从图书馆到食堂的位移;向量 $\overrightarrow{BC}$ 表示从食堂到操场的位移;向量 $\overrightarrow{OC}$ 表示从开始到最后的位移.



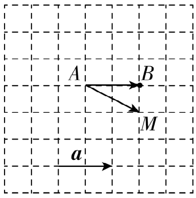
5. C 【解析】$|\boldsymbol{a}|$ 的大小不能确定,**故** A **错误**;$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 的方向不确定,**故** B **错误**;非零向量的模是正实数,**故** C **正确**;向量的模是一个非负实数,**故** D **错误**.

6. C 【解析】对于 A,$|\overrightarrow{CD}|=|\overrightarrow{DC}|$,都等于线段 CD 的长度,**故** A **正确**;对于 B,$\boldsymbol{e}_1$,$\boldsymbol{e}_2$ 是单位向量,则 $|\boldsymbol{e}_1|=|\boldsymbol{e}_2|=1$,**故** B **正**

确;对于 C,向量的模可以比较大小,但是向量 $\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{CD}$ 不能比较大小,**故 C 错误**;对于 D,两个相同的向量的模相等,**故 D 正确**.

7. A 【**解析**】由 $|\overrightarrow{OC}|=|\overrightarrow{OB}|$ 得 $\angle ABC=\angle OCB=30°$. 因为 C 为半圆上的点,所以 $\angle ACB=90°$,所以 $|\overrightarrow{AC}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|=1$. **故选 A.**

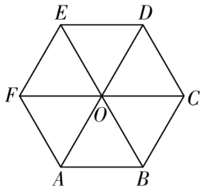
8. 【**解**】(1)如图,根据向量相等的定义,$\overrightarrow{AB}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同,长度相等,即 $|\overrightarrow{AB}|=2$,即可得到有向线段 $\overrightarrow{AB}$.



(2)满足条件的有向线段 $\overrightarrow{AM}$ 如图所示(画法不唯一),点 M 的轨迹是以点 A 为圆心,半径 $r=\sqrt{5}$ 的圆.

(3)根据 $|\overrightarrow{AB}|=2<r=|\overrightarrow{AM}|=\sqrt{5}$,可知 B 在以 A 为圆心,半径 $r=\sqrt{5}$ 的圆内,则 $|\overrightarrow{BM}|_{\max}=2+\sqrt{5}$,$|\overrightarrow{BM}|_{\min}=\sqrt{5}-2$.

9. D 【**解析**】平行向量的方向不一定相同,非零的两个平行向量方向可以相反,**故选项 A 错误**;共线的两个单位向量长度都是 1 个单位长度,但方向可能相同也可能相反,故共线的两个单位向量不一定相等,**故选项 B 错误**;当 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ 时,若 A,B,C,D 四点不共线,则 $AB/\!/DC$ 且 $AB=DC$,即 A,B,C,D 是一个平行四边形的四个顶点,若 A,B,C,D 四点共线,则不是平行四边形的四个顶点,**故选项 C 错误**;如图,在边长为 1 的正六边形 $ABCDEF$ 中,O 为该正六边形的中心,$\overrightarrow{OA}$,$\overrightarrow{OB}$,$\overrightarrow{AB}$ 都为单位向量,长度相同,物体的两次运动记为 $\overrightarrow{OA}$,$\overrightarrow{AB}$,它的位移是 $\overrightarrow{OB}$,**故选项 D 正确.**



规律点拨 位移表示物体的位置变化，表示起点与终点间的位置关系，与物体的实际运动路径无关，所以本题选项 D 所描述的情况是可能的.

10. B　【解析】相等的非零向量的方向相同且长度相等，故两个相等的非零向量同起点必同终点，即①**正确**；

若非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的方向相同或相反，即②**错误**；

当 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，且 $\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{c}$ 时，若 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}$ 是非零向量，则不能确定 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{c}$，即③**错误**.

综上，正确命题的个数是 1. **故选** B.

易错警示 **与向量共线有关的命题判断中易忽略零向量致错**

我们知道，零向量与任意向量共线，因此在判断与向量共线有关的命题的真假时，如果没有明确说明向量是非零向量，一定要考虑某个向量是零向量的情况，不要直接利用我们已学的一些平行知识判断.

规律点拨 **共线向量的四个理解**

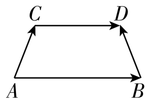
(1)平行直线不包含重合的情况，平行向量是可以重合的.

(2)共线向量不一定是相等向量，但相等向量一定是共线向量.

(3)向量相等具有传递性，向量平行不具有传递性，但是非零向量的平行具有传递性.

(4)判断共线向量的有关表述的正误时，一定要注意题干是否对"非零"作出限定.

11. D　【解析】如图所示，$\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 共线，但 $\overrightarrow{AC}$ 与 $\overrightarrow{BD}$ 不共线. 当 A,B,C,D 四点在一条直线上时，$\overrightarrow{AC}$ 与 $\overrightarrow{BD}$ 共线，**故** A，B **错误**.



若 $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{CD}|$，则 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 的大小相

等,但无法确定 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 的方向,所以无法确定 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 是否为相等向量,**故 C 错误.**

根据单位向量的定义可知,若 $|\overrightarrow{AB}|=1$,则 $\overrightarrow{AB}$ 是一个单位向量,**故 D 正确. 故选 D.**

归纳总结 (1)非零共线向量要求方向相同或相反,长度没有要求.

(2)相等向量的方向相同且长度相等.

(3)单位向量只要求其长度为 1 个单位长度.

(4)零向量的长度为 0,方向是任意的,它与任意向量平行. $|\boldsymbol{a}|=0\Leftrightarrow\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

12. **攻略上分** 本题需找出与 $\overrightarrow{EF}$ 共线、长度相等、相等的向量,可用通法攻略 1 中的技巧求解.

【解】(1)$\because E,F$ 分别是 AC,AB 的中点,

$\therefore EF/\!/BC$,$\therefore$ 与 $\overrightarrow{EF}$ 共线的向量为 $\overrightarrow{FE}$,$\overrightarrow{BD}$,$\overrightarrow{DB}$,$\overrightarrow{DC}$,$\overrightarrow{CD}$,$\overrightarrow{BC}$,$\overrightarrow{CB}$.

提示: 找共线向量时, 不仅要找方向相同的, 还要找方向相反的

(2)$\because E,F,D$ 分别是 AC,AB,BC 的中点,

$\therefore EF=\dfrac{1}{2}BC$,$BD=DC=\dfrac{1}{2}BC$,$\therefore EF=BD=DC$. 又 AB,BC,AC 均不相等,$\therefore$ 与 $\overrightarrow{EF}$ 长度相等的向量为 $\overrightarrow{FE}$,$\overrightarrow{BD}$,$\overrightarrow{DB}$,$\overrightarrow{DC}$,$\overrightarrow{CD}$.

(3)与 $\overrightarrow{EF}$ 相等的向量为 $\overrightarrow{DB}$,$\overrightarrow{CD}$.

提示: 需要满足方向相同、长度相等

13. 【**证明**】因为 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$,所以 $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{DC}|$ 且 $AB/\!/CD$,所以四边形 $ABCD$ 是平行四边形,所以 $|\overrightarrow{DA}|=|\overrightarrow{CB}|$ 且 $DA/\!/CB$. 又因为 $\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{MA}$,所以 $|\overrightarrow{CN}|=|\overrightarrow{MA}|$ 且 $CN/\!/MA$,所以四边形 $CNAM$ 是平行四边形,所以 $|\overrightarrow{CM}|=|\overrightarrow{NA}|$,所以 $|\overrightarrow{MB}|=|\overrightarrow{DN}|$,而 $DN/\!/BM$,即 $\overrightarrow{DN}$ 与 $\overrightarrow{MB}$ 的模相等且方向相同,所以 $\overrightarrow{DN}=\overrightarrow{MB}$.

6.1 节测上分

1. D 【解析】单位向量的方向不一定相同,因此单位向量不一定相等,**故选项** A **错误**;共线向量有可能在同一条直线上,也有可能不在同一条直线上,**故选项** B **错误**;零向量有方向,其方向任意,**故选项** C **错误**;模为 0 的向量为零向量,零向量与任意非零向量共线,**故选项** D **正确**.

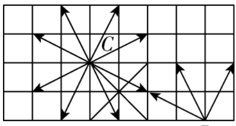
2. B 【解析】$\because$ O 是正三角形 ABC 的中心,$\therefore$ 点 O 到三个顶点的距离相等,故 $|\overrightarrow{AO}|=|\overrightarrow{BO}|=|\overrightarrow{OC}|$,但是向量 $\overrightarrow{AO}$,$\overrightarrow{BO}$,$\overrightarrow{OC}$ 不是相同的向量,也不是共线向量,也不是起点相同的向量,**故选** B.

3. D 【解析】在四边形 $ABCD$ 中,$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$,则 $BA/\!/CD$ 且 $BA=CD$,所以四边形 $ABCD$ 为平行四边形. $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AD}|$ 意味着平行四边形 $ABCD$ 的邻边相等,则它是菱形. 在菱形中又满足 $|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{BD}|$,即对角线相等,于是四边形 $ABCD$ 为正方形,**故** D **正确**.

4. $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{d}$,$\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{e}$　$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{d}$,$\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{e}$　$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{c}$,$\boldsymbol{d}$

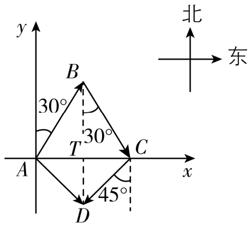
【解析】由题图可知,$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{d}$,$\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{e}$,因此 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{d}$ 是共线向量,并且方向相反;$\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{e}$ 是共线向量,并且方向相反. 显然 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{5}$,$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}$,$|\boldsymbol{c}|=\sqrt{5}$,$|\boldsymbol{d}|=\sqrt{5}$,$|\boldsymbol{e}|=2\sqrt{2}$,因此 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{c}$,$\boldsymbol{d}$ 的模相等.

5. 11 【解析】马在 B 处有 3 个位置可走,在 C 处有 8 个位置可走,如图,以 B 为起点作向量,共 3 个;以 C 为起点作向量,共 8 个,所以共有 11 个.



6.【解】如图,以 A 为原点,正东方向为 x 轴正方向,正北方向为 y 轴正方向建立直角坐标系.

由题意知点 B 在第一象限,点 C 在 x 轴正半轴上,点 D 在第四象限,向量 $\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{BC}$,$\overrightarrow{CD}$ 如图所示.



由已知可得，$\triangle ABC$ 为正三角形，所以 $AC=2\ 000$ km. 过点 D 作 $DT\perp x$ 轴，交 x 轴于点 T，因为 $\angle ACD=45°$，$CD=1\ 000\sqrt{2}$ km，所以 $CT=1\ 000$ km，则直线 DT 为线段 AC 的垂直平分线，所以 $AD=1\ 000\sqrt{2}$ km，$\angle CAD=45°$. 故向量 $\overrightarrow{AD}$ 的模为 $1\ 000\sqrt{2}$，方向为东南方向.

规律点拨 用有向线段表示向量时，先确定起点，再确定方向，最后根据向量的模确定有向线段的终点.

7. （1）【解】根据题意，与向量 $\overrightarrow{FC}$ 共线的向量为 $\overrightarrow{CF}$，$\overrightarrow{FB}$，$\overrightarrow{BF}$，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{CB}$，$\overrightarrow{AE}$，$\overrightarrow{EA}$，$\overrightarrow{ED}$，$\overrightarrow{DE}$，$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{DA}$.

（2）【证明】$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，且 E,F 分别为边 AD,BC 的中点，

$\therefore BF=ED$，且 $BF/\!/ED$.

$\therefore$ 四边形 $BFDE$ 是平行四边形，

$\therefore BE=FD$，且 $BE/\!/FD$，

$\therefore \overrightarrow{BE}=\overrightarrow{FD}$.

6.2 平面向量的运算

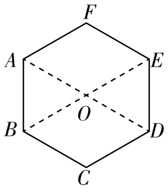
6.2.1 向量的加法运算+

6.2.2 向量的减法运算

对点上分

1. B 【解析】$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}=\mathbf{0}$. 故选 B.

2. D 【解析】如图，连接 AD,BE. 设 AD 与 BE 交于点 O，则 $\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{EF}$，即 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OA}=\mathbf{0}$. 故选 D.



3. D 【解析】由题知，矩形 $ABCD$ 的对角线 AC,BD 交于点 O，则 $\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{OB}$，所以 $\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{OB}$. **故选 D.**

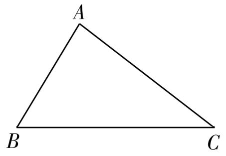
4. ABD 【解析】A 选项，$\overrightarrow{CA}-(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}=\mathbf{0}$；

B 选项，$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CD}=\mathbf{0}$；

C 选项，$\overrightarrow{AB}-(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AC})=\overrightarrow{AB}-(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA})=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}\neq\mathbf{0}$；

D 选项，$\overrightarrow{NO}-\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{NO}+\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{MN}=\mathbf{0}$. **故选 ABD.**

5. B 【解析】由向量加法的三角形法则，可知 $\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，则 $\overrightarrow{AB}=-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$. **故选 B.**

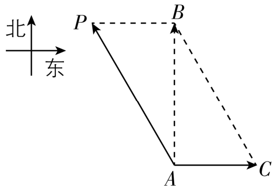


一题多解 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}=-\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{CA}=-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

6. 北偏西 30°　20 km/h

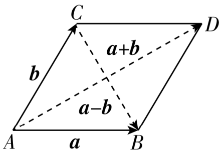
攻略上分 本题需利用通法攻略 2 中的平行四边形法则作图，进而确定小船的行驶方向及小船在静水中的速度大小.

【解析】如图所示，$\overrightarrow{AC}$ 表示水流速度，且 $|\overrightarrow{AC}|=10$，$\overrightarrow{AP}$ 表示小船在静水中的速度，以 AC,AP 为邻边作平行四边形 $ACBP$，连接 AB，则 $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}$，即 $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$，$|\overrightarrow{AB}|=10\sqrt{3}$，$AB\perp AC$，则在 Rt△$ABC$ 中，$\tan\angle CBA=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{10}{10\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，故 $\angle CBA=\dfrac{\pi}{6}$，故 $\angle BAP=\angle CBA=\dfrac{\pi}{6}$，小船行驶的方向为北偏西 30°，且 $|\overrightarrow{AP}|=\dfrac{|\overrightarrow{AB}|}{\cos 30°}=20$，即小船在静水中的速度大小为 20 km/h.



7. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 【解析】设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$，以 AB,AC

为邻边作平行四边形 $ABDC$，连接 AD，BC，如图，当 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$ 时，$\triangle ABC$ 为等边三角形，则 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$ 为线段 AD 的长度，所以 $\dfrac{|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|}=\tan 30°=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.



8. BCD

攻略上分 利用大招攻略 3 向量三角不等式判断即可.

【解析】对于 A，$|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|>|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$ 一定不成立；

对于 B，当 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ 时成立；

对于 C，当非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线，方向相反，且 $|\boldsymbol{a}|\geqslant|\boldsymbol{b}|$ 时成立；

对于 D，当非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线，且方向相同时成立. **故选** BCD.

归纳总结 **向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的模及方向**

(1) 当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线时，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的方向都不相同，且 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$.

(2) 当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向时，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的方向相同，且 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$.

(3) 当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向时，若 $|\boldsymbol{a}|>|\boldsymbol{b}|$，则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同，且 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$；若 $|\boldsymbol{a}|<|\boldsymbol{b}|$，则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的方向与 $\boldsymbol{b}$ 的方向相同，且 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{b}|-|\boldsymbol{a}|$；若 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$，则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 为零向量.

(4) 对于方向不定的非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|_{\max}=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|_{\min}=||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}||$.

9. **攻略上分** 根据题意，利用向量三角不等式求解即可.

【解】易知 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$.

当 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ 同向共线时，$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{OA}|-|\overrightarrow{OB}|=3$；

当 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ 反向共线时，$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{OA}|+|\overrightarrow{OB}|=13$；

当 $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$ 不共线时，由 $||\overrightarrow{OA}|-|\overrightarrow{OB}||<|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}|<|\overrightarrow{OA}|+|\overrightarrow{OB}|$，可得 $3<|\overrightarrow{AB}|<13$.

综上，$|\overrightarrow{AB}|$ 的取值范围为 $[3,13]$.

能力上分

1. D 【解析】根据向量加法的平行四边形法则及向量减法的几何意义，即可判断 A，B，C 错误；

$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\overrightarrow{BA}$，$\boldsymbol{c}-\boldsymbol{d}=\overrightarrow{DC}$，而 $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DC}=\mathbf{0}$，故 D 正确.

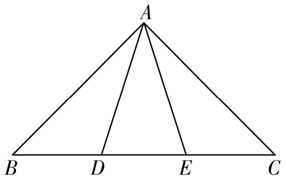
2. D 【解析】由于 $|\overrightarrow{AB}|=|\boldsymbol{a}|=1$，$|\overrightarrow{BC}|=|\boldsymbol{b}|=1$，$|\overrightarrow{AC}|=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}$，则 $|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2$，即 $|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{BC}|^2=|\overrightarrow{AC}|^2$，所以 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形. 故选 D.

3. D 【解析】如图，$\overrightarrow{AD}$ 与 $\overrightarrow{AE}$ 方向不同，故 A 错误；

$\overrightarrow{BD}$ 与 $\overrightarrow{CE}$ 方向相反，故 B 错误；

因为 D,E 在边 BC 上，满足 $BD=DE=EC$，所以 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AE}$，由 A 选项分析知 $\overrightarrow{AD}$ 与 $\overrightarrow{AE}$ 不相等，故 C 错误；

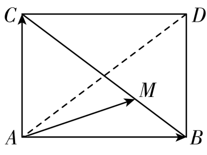
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}+(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{EC})$，因为 $\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{EC}=\mathbf{0}$，所以 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$，故 D 正确. 故选 D.



4. 2 【解析】$|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}|=|\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD})|=|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}|=|\overrightarrow{CB}|=2$.

5. 1　7 【解析】当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向共线时，$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$ 取得最小值 $4-3=1$；当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向共线时，$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$ 取得最大值 $3+4=7$.

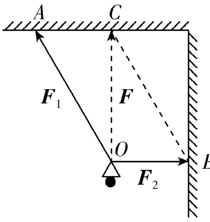
6. $\dfrac{12}{5}$ 【解析】如图，以 AB,AC 为邻边作出平行四边形 $ABDC$，连接 AD，因为 $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}|$，所以 $|\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{CB}|$，所以平行四边形 $ABDC$ 是矩形. 由于 $|\overrightarrow{AB}|=4$，$|\overrightarrow{AC}|=3$，故 $|\overrightarrow{CB}|=5$，当 $AM\perp BC$ 时，$|\overrightarrow{AM}|$ 取得最小值，最小值为 $\dfrac{4\times3}{5}=\dfrac{12}{5}$.



规律总结 (1)在平行四边形 $ABCD$ 中,记 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$. ①对角线的平方和等于四条边的平方和,即 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=2(|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2)$;②若 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$,则平行四边形 $ABCD$ 为矩形;③若 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$,则平行四边形 $ABCD$ 为菱形;④若 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$,则平行四边形 $ABCD$ 是 $\angle ABC=60°$ 的菱形;⑤若 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$,则平行四边形 $ABCD$ 是 $\angle DAB=60°$ 的菱形.

(2)一般将向量放在具体的几何图形中,常见的有三角形、四边形(平行四边形、矩形、菱形)及正六边形等.

7. $12\sqrt{3}$ **N**　竖直向上　【解析】如图,以 OA,OB 为邻边作平行四边形 $BOAC$,连接 OC,设 $\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{F}$,则 $\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2=\boldsymbol{F}$,即 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$,由题知 $\angle OAC=60°$,$|\overrightarrow{OA}|=24$,$|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{OB}|=12$,$\therefore\angle ACO=90°$,$|\overrightarrow{OC}|=12\sqrt{3}$. $\therefore$ $\boldsymbol{F}_1$ 与 $\boldsymbol{F}_2$ 的合力大小为 $12\sqrt{3}$ **N**,方向为竖直向上.



8.【解】(1)$\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}$.

(2)$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CE}-\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}-(\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{EA})=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AB}$.

(3)因为 D,E,F 分别是边 BC,AC,AB 的中点,所以 $FE=\frac{1}{2}BC=BD$. 又因为 $FE/\!/BC$,所以 $\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{BD}$,所以 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}$.

9.【证明】因为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{d}$,所以 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{d}-\boldsymbol{c}$.

因为向量 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$,$\overrightarrow{OD}=\boldsymbol{d}$,

所以 $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}$,即 $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$,所以 $BA/\!/CD$,且 $BA=CD$,所以四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

6.2.3　向量的数乘运算

对点上分

1. C　【解析】当 $\lambda<0$ 时，$|\lambda\boldsymbol{a}|=\lambda|\boldsymbol{a}|$ 不成立，**故 A 错误；**

$|\lambda\boldsymbol{a}|$ 是一个非负实数，而 $|\lambda|\boldsymbol{a}$ 是一个向量，**故 B 错误；**

当 $\lambda=0$ 或 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 时，$|\lambda\boldsymbol{a}|=0$，**故 D 错误.**

故选 C.

2. D　【解析】$\because$ 点 C 在线段 AB 上，且 $\frac{AC}{CB}=\frac{3}{7}$，$\therefore$ $AC=\frac{3}{10}AB$，$BC=\frac{7}{10}AB$，则 $\overrightarrow{AC}=\frac{3}{10}\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}=\frac{7}{10}\overrightarrow{BA}$，**故 A，B 错误；**

$\overrightarrow{BC}=\frac{7}{10}\overrightarrow{BA}=-\frac{7}{10}\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}=\frac{3}{10}\overrightarrow{AB}=-\frac{3}{10}\overrightarrow{BA}$，

故 C 错误，D 正确.

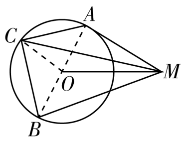
3. ABC　【解析】$\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$，所以 $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{0}$，**故 A 正确；**

$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$，**故 B 正确；**

$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$，**故 C 正确；**

因为 E 为线段 BD 上靠近 B 的三等分点，所以 $\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{ED}$，易知 $\triangle BEQ\backsim\triangle DEA$，则 $\overrightarrow{BQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$，所以 $\overrightarrow{FQ}=\overrightarrow{BQ}-\overrightarrow{BF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}-\frac{2}{3}\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}-\frac{2}{3}(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{6}\overrightarrow{AD}$，**故 D 错误. 故选 ABC.**

4. C　【解析】连接 AB，OC，如图所示.



因为 $AC\perp BC$，所以 AB 为圆 O 的一条直径，故 O 为 AB 的中点，

所以 $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA})+(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB})=$

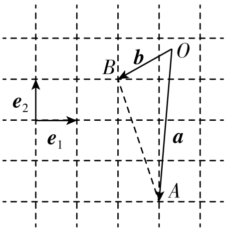
$2\overrightarrow{MO}$，所以 $|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}|=|2\overrightarrow{MO}+2(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OC})|=|4\overrightarrow{MO}+2\overrightarrow{OC}|\leqslant 4|\overrightarrow{MO}|+2|\overrightarrow{OC}|=4\times 2+2\times 1=10$，当且仅当点 M，O，C 共线且 $\overrightarrow{MO}$，$\overrightarrow{OC}$ 同向时，等号成立，因此 $|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}|$ 的最大值为 10. **故选** C.

5.【解】（1）$\frac{2}{3}\left[\frac{1}{2}(2\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b})-(4\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\right]=\frac{2}{3}[(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})-(4\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})]=\frac{2}{3}(3\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{a})=2\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a}$.

（2）因为 $3(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a})+2(\boldsymbol{x}-2\boldsymbol{a})-4(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{x}+3\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，故 $\boldsymbol{x}=4\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{a}$.

提示：移项应改变符号

6. B【解析】由图可知，$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$，$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}$，连接 BA，所以 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{e}_1-3\boldsymbol{e}_2$，**故选** B.



7. A

攻略上分 易知 $\overrightarrow{AD}$ 在 $\triangle ACD$ 中，可先用 $\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{CD}$ 表示 $\overrightarrow{AD}$，再根据 $\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{CD}$ 将 $\overrightarrow{CD}$ 用 $\overrightarrow{BC}$ 表示，使 $\overrightarrow{CD}$ 最终可以用 $\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AB}$ 表示，最后合并同类项即可求得结果.

【解析】$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. **故选** A.

8. D【解析】$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=3\boldsymbol{a}-6\boldsymbol{b}$，即 $\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$，所以 A，C，D 三点共线，**故选** D.

9. D【解析】由 $5\overrightarrow{AB}=-3\overrightarrow{CD}$ 知 $\overrightarrow{AB}/\!/\overrightarrow{CD}$ 且 $|\overrightarrow{AB}|\neq|\overrightarrow{CD}|$，故此四边形为梯形. 又因为 $|\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{BC}|$，所以梯形 $ABCD$ 为等腰梯形. **故选** D.

10. C【解析】因为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线，且 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 共线，所以 $\lambda\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}$，即

$\begin{cases}\lambda=m,\\ \lambda k=-1,\end{cases}$ 即 $km+1=0$. **故选 C.**

11. D 【解析】因为 $\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{AP}=\left(m+\frac{1}{3}\right)\overrightarrow{AB}+\frac{1}{9}\overrightarrow{AC}$, 所以 $\overrightarrow{AP}=\left(m+\frac{1}{3}\right)\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AN}$. 因为 B,P,N 三点共线, 所以 $m+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=1$, 解得 $m=\frac{1}{3}$. **故选 D.**

12. -2 【解析】依题意 $\boldsymbol{e}_1$ 与 $\boldsymbol{e}_2$ 是不共线的向量, $k\boldsymbol{e}_1+4\boldsymbol{e}_2$ 与 $\boldsymbol{e}_1+k\boldsymbol{e}_2$ 共线且方向相反, 所以 $\begin{cases}k<0,\\ \frac{k}{1}=\frac{4}{k},\end{cases}$ 解得 $k=-2$.

易错警示 **利用向量共线定理求参数时忽略方向要求致错**

利用向量共线定理求参数时, 要注意系数的正负与两向量方向的关系, 本题中要求共线的向量方向相反, 所以 k 小于 0.

13. 3 【解析】连接 AP(图略), 因为 $\overrightarrow{BP}=2\overrightarrow{PC}$, $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN}=\mu\overrightarrow{AC}(\lambda>0,\mu>0)$, 所以 $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3\lambda}\overrightarrow{AM}+\frac{2}{3\mu}\overrightarrow{AN}$. 因为 M,P,N 三点共线, 所以 $\frac{1}{3\lambda}+\frac{2}{3\mu}=1(\lambda>0,\mu>0)$, 所以 $\lambda+2\mu=(\lambda+2\mu)\left(\frac{1}{3\lambda}+\frac{2}{3\mu}\right)=\frac{5}{3}+\frac{2\mu}{3\lambda}+\frac{2\lambda}{3\mu}\geqslant\frac{5}{3}+2\sqrt{\frac{2\mu}{3\lambda}\cdot\frac{2\lambda}{3\mu}}=\frac{5}{3}+\frac{4}{3}=3$, 当且仅当 $\frac{2\mu}{3\lambda}=\frac{2\lambda}{3\mu}$, 即 $\mu=\lambda=1$ 时等号成立. 所以 $\lambda+2\mu$ 的最小值为 3.

14. (1)【解】由题意知, $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$, 可得 $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$.

由 $\overrightarrow{DF}=3\overrightarrow{FB}$, 可得 $\overrightarrow{BF}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BD}$,

所以 $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{a}+\frac{1}{4}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=\frac{3}{4}\boldsymbol{a}+\frac{1}{4}\boldsymbol{b}$.

(2)【证明】连接 EF,EC(图略). 因为 $\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{EB}$,所以 $\overrightarrow{AE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$,

所以 $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AE}=\frac{3}{4}\boldsymbol{a}+\frac{1}{4}\boldsymbol{b}-\frac{2}{3}\boldsymbol{a}=\frac{1}{12}\boldsymbol{a}+\frac{1}{4}\boldsymbol{b}$,

又 $\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BC}=\frac{1}{3}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,所以 $\overrightarrow{EC}=4\overrightarrow{EF}$,

所以 E,F,C 三点共线.

规律方法 **用几何图形中的已知向量表示未知向量的方法**

(1)观察待表示向量的位置;

(2)寻找相应的平行四边形或三角形;

(3)运用法则找关系,表示出未知向量.

在求解时,要注意以下三点:

(1)注意相等向量、相反向量、共线向量与已知向量或待表示向量之间的关系;

(2)注意应用向量加法、减法的几何意义以及它们的运算律;

(3)注意在封闭图形中利用向量求和的多边形法则.

能力上分

1. D 【解析】因为 $5(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})-4(\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{a})-\boldsymbol{c}=-7\boldsymbol{a}-14\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$,

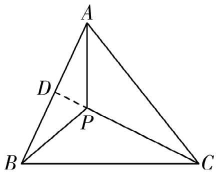
所以 $\boldsymbol{c}=-7\boldsymbol{a}-14\boldsymbol{b}$.

2. A

攻略上分 本题的解题关键是通过平面向量的运算对 $\overrightarrow{CF}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$ 进行适当变形,再利用三点共线定理求解即可.

【解析】$\overrightarrow{CF}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}=x(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA})+y\overrightarrow{AC}=x\overrightarrow{CB}-(x+y)\overrightarrow{CA}$. 因为 $\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{EC}$,所以 $\overrightarrow{CA}=3\overrightarrow{CE}$,即 $\overrightarrow{CF}=x\overrightarrow{CB}-3(x+y)\overrightarrow{CE}$. 由 F,B,E 三点共线,可得 $x-3(x+y)=1$,即 $2x+3y=-1$,**故①正确**. 又 D 为 BC 的中点,所以 $\overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{CD}$,即 $\overrightarrow{CF}=2x\overrightarrow{CD}-(x+y)\overrightarrow{CA}$. 由 F,D,A 三点共线,可得 $2x-(x+y)=1$,即 $x-y=1$,**故③正确. 故选** A.

3. A　【解析】$\because 2\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\mathbf{0}$，$\therefore 2(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB})=\overrightarrow{CP}$. 设 D 为 AB 边的中点，连接 DP，则 $4\overrightarrow{PD}=\overrightarrow{CP}$. 如图，$D,P,C$ 三点共线，$|\overrightarrow{PD}|=\frac{1}{5}|\overrightarrow{CD}|$，$\therefore S_{\triangle ABP}$ ：$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{5}$. **故选** A.



4. B　【解析】$\because O$ 是 $\triangle ABC$ 的重心，$\therefore \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$，$\because \overrightarrow{OP}=\frac{1}{3}\left(2\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}\right)=\frac{1}{3}\left[\frac{3}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})\right]=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}\overrightarrow{OA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$，$\therefore$ 点 P 是 BC 边中线的三等分点（非重心）. **故选** B.

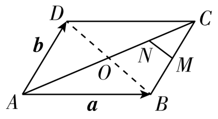
5. $\frac{1}{4}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$　【解析】如图所示，在▱$ABCD$ 中，连接 BD，设 AC 交 BD 于点 O.

因为 $\overrightarrow{AN}=3\overrightarrow{NC}$，所以 $\overrightarrow{NC}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$，

所以 N 为 OC 的中点，

又 M 为 BC 的中点，所以 $MN=\frac{1}{2}BO$，且 $MN/\!/BO$，

所以 $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BO}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BD}=\frac{1}{4}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$.



一题多解　$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AN}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}+\frac{3}{4}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\frac{1}{4}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$.

6. (1)【证明】因为 $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=4\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+8\boldsymbol{e}_1-9\boldsymbol{e}_2=12\boldsymbol{e}_1-8\boldsymbol{e}_2=4(3\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2)=4\overrightarrow{AB}$，所以 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BD}$ 共线，所以 A,B,D 三点共线.

(2)【解】因为 $2\lambda\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$ 与 $\boldsymbol{e}_1+\lambda\boldsymbol{e}_2$ 共线，

所以存在实数 μ，使 $2\lambda\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2=\mu(\boldsymbol{e}_1+\lambda\boldsymbol{e}_2)$．因为 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 不共线，所以 $\begin{cases}2\lambda=\mu,\\1=\lambda\mu,\end{cases}$ 所以 $\lambda=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

(3)【解】假设 $\boldsymbol{e}_1+\lambda\boldsymbol{e}_2$ 与 $\lambda\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$ 共线，则存在实数 m，使 $\boldsymbol{e}_1+\lambda\boldsymbol{e}_2=m(\lambda\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)$．因为 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 不共线，所以 $\begin{cases}1=\lambda m,\\\lambda=m,\end{cases}$ 所以 $\lambda=\pm1$. 因为 $\boldsymbol{e}_1+\lambda\boldsymbol{e}_2$ 与 $\lambda\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$ 不共线，所以 λ 的取值范围是 $(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$.

7.【解】(1) 由题意可知，$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，$\therefore\overrightarrow{AO}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AP}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{6}\overrightarrow{AC}$. 设 $\overrightarrow{AB}=x\overrightarrow{AE}$，则 $\overrightarrow{AO}=\dfrac{x}{3}\overrightarrow{AE}+\dfrac{1}{6}\overrightarrow{AC}$. $\because F,O,E$ 三点共线，$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AC}$，$\therefore C,O,E$ 三点共线，$\therefore\dfrac{x}{3}+\dfrac{1}{6}=1$，解得 $x=\dfrac{5}{2}$，$\therefore AE=\dfrac{2}{5}AB$，$\therefore\dfrac{AE}{EB}=\dfrac{2}{3}$.

(2) $\because\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EB}=(1+\lambda)\overrightarrow{AE}$，同理可得 $\overrightarrow{AC}=(1+\mu)\overrightarrow{AF}$，由(1)可知，$\overrightarrow{AO}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{6}\overrightarrow{AC}$，$\therefore\overrightarrow{AO}=\dfrac{1+\lambda}{3}\cdot\overrightarrow{AE}+\dfrac{1+\mu}{6}\overrightarrow{AF}$. $\because E,O,F$ 三点共线，$\therefore\dfrac{1+\lambda}{3}+\dfrac{1+\mu}{6}=1$，整理得 $2\lambda+\mu=3$，$\therefore\dfrac{1}{\lambda}+\dfrac{1}{\mu}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{\lambda}+\dfrac{1}{\mu}\right)\cdot(2\lambda+\mu)=\dfrac{1}{3}\left(3+\dfrac{\mu}{\lambda}+\dfrac{2\lambda}{\mu}\right)\geqslant\dfrac{1}{3}\left(3+2\sqrt{\dfrac{\mu}{\lambda}\cdot\dfrac{2\lambda}{\mu}}\right)=\dfrac{3+2\sqrt{2}}{3}$，当且仅当 $\mu=\sqrt{2}\lambda$，即 $\mu=3\sqrt{2}-3$，$\lambda=\dfrac{6-3\sqrt{2}}{2}$ 时等号成立，$\therefore\dfrac{1}{\lambda}+\dfrac{1}{\mu}$ 的最小值为 $\dfrac{3+2\sqrt{2}}{3}$.

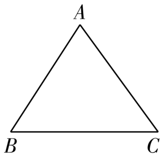
6.2.4 向量的数量积

对点上分

1. C 【解析】根据平面向量数量积的定义知$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$与$\boldsymbol{c}$共线,$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$与$\boldsymbol{a}$共线,**故 A 错误**;当$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$时,$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$不一定相等,如$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{c}$且$\boldsymbol{b}\perp\boldsymbol{c}$时,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=0$,但$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$可能不相等,**故 B 错误**;根据平面向量共线定理知,若$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$,则$\exists\lambda\in\mathbf{R}$,使$\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$,**故 C 正确**;根据平面向量数量积的定义知,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cdot\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$,所以$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$,**故 D 错误**.

2. B 【解析】$(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA})\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}^2-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=16-3\times4\times\left(-\frac{1}{2}\right)=22$. **故 B 正确**.

易错警示 **确定向量夹角时忽略共起点致错**



利用定义法求数量积时,需要明确两个量,一个是模,一个是夹角. 当向量以$\triangle ABC$为背景时,要注意向量$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{AC}$的夹角是$\angle BAC$,而$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{CA}$的夹角是$\pi-\angle BAC$.

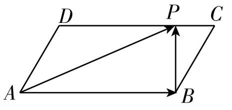
3. A 【解析】由已知得$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1\times3\times\frac{1}{3}=1$,所以$(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=2|\boldsymbol{a}|^2+3\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-2|\boldsymbol{b}|^2=2+3\times1-2\times9=-13$. **故 A 正确**.

方法总结 利用定义法求平面向量数量积时,

①需要明确相关向量的模及夹角,再利用公式$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$($\theta$为$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$的夹角)求解;

②若相关向量是两个或两个以上向量的线性运算,则需先利用数量积的运算律进行化简.

4. B 【解析】作出图形如图所示.



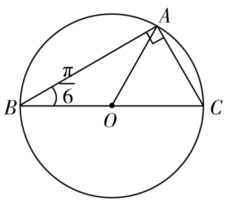
设 $\overrightarrow{DP}=\lambda\overrightarrow{DC}=\lambda\overrightarrow{AB}(0\leqslant\lambda\leqslant1)$，则 $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AD}+\lambda\overrightarrow{AB}$，所以 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=(\overrightarrow{AD}+\lambda\overrightarrow{AB})\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AB}^2=4$. 因为在平行四边形 $ABCD$ 中，已知 $AB=4$，$AD=2$，$\angle DAB=60°$，所以 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=2\times4\times\cos 60°+16\lambda=4$，解得 $\lambda=0$，则点 P 与点 D 重合，所以 $\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}$，则 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{AD}\cdot(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{AD}^2-\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=4-4=0$，**故 B 正确.**

方法总结 解决图形中的数量积问题，要充分利用图形特点及其含有的“已知”向量，这里的“已知”向量是指具有特殊夹角或已知长度的向量等.

5. D 【解析】设 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=k$，由题意可知，$k\geqslant0$，$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，两边同时平方可得 $\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=4(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2$，即 $2k^2+k-1=0$，解得 $k=\dfrac{1}{2}$(负值舍去)，故 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量为 $\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|^2}\cdot\boldsymbol{b}=\dfrac{1}{2}\boldsymbol{b}$. **故 D 正确.**

6. B 【解析】如图，因为 $2\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$，所以 O 为 BC 边的中点，所以 BC 为 $\triangle ABC$ 外接圆的直径，$\angle BAC=\dfrac{\pi}{2}$ 且 $OA=OB=OC=R$(R 为 $\triangle ABC$ 外接圆的半径).

又 $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{3}|\overrightarrow{AO}|=\sqrt{3}R$，所以 $|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{|\overrightarrow{BC}|^2-|\overrightarrow{AB}|^2}=\sqrt{(2R)^2-(\sqrt{3}R)^2}=R=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{BC}|$，所以 $\angle ABC=\dfrac{\pi}{6}$，则 $\overrightarrow{BA}$ 在 $\overrightarrow{BC}$ 上的投影向量为 $|\overrightarrow{BA}|\cos\angle ABC\cdot\dfrac{\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BC}|}=\sqrt{3}R\cdot\dfrac{\overrightarrow{BC}}{2R}\cos\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{BC}$. **故 B 正确.**



7. $2\sqrt{3}$ 【解析】因为向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\dfrac{\pi}{6}$，$|\boldsymbol{a}|=3$，$|\boldsymbol{b}|=4$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot$

$|\boldsymbol{b}|\cos\dfrac{\pi}{6}=3\times4\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$,

所以 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上的投影向量为 $\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|^2}\cdot\boldsymbol{a}=\dfrac{6\sqrt{3}}{3^2}\boldsymbol{a}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\boldsymbol{a}$,

所以 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上的投影向量的模为 $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}|\boldsymbol{a}|=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\times3=2\sqrt{3}$.

8. 【解】$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 是单位向量,且 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 的夹角为 $\dfrac{2\pi}{3}$,则 $\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2=|\boldsymbol{e}_1||\boldsymbol{e}_2|\cos\dfrac{2\pi}{3}=1\times1\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}$,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)\cdot(2\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2)=2\boldsymbol{e}_1^2-\boldsymbol{e}_2^2+\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2=2-1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$,$\boldsymbol{b}^2=(2\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2)^2=4\boldsymbol{e}_1^2+\boldsymbol{e}_2^2-4\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2=4+1-4\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=7$,故 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量为 $\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|^2}\boldsymbol{b}=\dfrac{\frac{1}{2}}{7}\boldsymbol{b}=\dfrac{1}{14}\boldsymbol{b}$.

易错警示 **误认为投影向量为数量致错**

投影是一种变换,投影向量是向量不是数量,所以在写投影向量时不要漏写对应的向量.

9. AB 【解析】对于 A,若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角为钝角,则 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle<0$,所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle<0$,**故 A 正确**;对于 B,因为 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$,$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$,又 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$,所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,又 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 都是非零向量,所以 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$,**故 B 正确**;对于 C,当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 同向时,有 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}>0$,此时夹角为 0,**故 C 错误**;对于 D,若 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{b}$,则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}$,所以 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$ 反向,**故 D 错误**.

10. A 【解析】因为 $|\boldsymbol{a}|=2$,$|\boldsymbol{b}|=4$,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=5$,所以 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=4-5=-1$,则 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2}=\sqrt{\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2}=\sqrt{4-10+16}=\sqrt{10}$,故 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|}=\dfrac{-1}{2\times\sqrt{10}}=-\dfrac{\sqrt{10}}{20}$. **故 A 正确.**

11. C 【解析】设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ,则 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$. 因为非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=4$,

$|\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}|(t\in\mathbf{R})$的最小值为2,所以$\boldsymbol{a}^2+2t\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+t^2\boldsymbol{b}^2=t^2\boldsymbol{b}^2+8t|\boldsymbol{b}|\cos\theta+16$的最小值为$\dfrac{4\times\boldsymbol{b}^2\times16-(8|\boldsymbol{b}|\cos\theta)^2}{4\times\boldsymbol{b}^2}=16-16\cos^2\theta=4$,可得$\cos^2\theta=\dfrac{3}{4}$,即$\cos\theta=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,可得$\theta=\dfrac{\pi}{6}$或$\theta=\dfrac{5\pi}{6}$. **故C正确.**

12. C　【解析】因为$|\boldsymbol{a}|=3,|\boldsymbol{b}|=2,|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{19}$,所以$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=9+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+4=19$,解得$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=3$,

所以$|2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}|=\sqrt{(2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})^2}=\sqrt{4\boldsymbol{a}^2-12\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+9\boldsymbol{b}^2}=\sqrt{4\times9-12\times3+9\times4}=6$. **故C正确.**

关键点拨　$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}^2}$或$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}^2=|\boldsymbol{a}|^2$是求向量的模及用向量求解一些长度的依据.

13. B　【解析】已知菱形$ABCD$的边长为1,$\angle A=60°$,$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c}$.

因为$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cdot\cos60°=\dfrac{1}{2}$,

所以$|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|=\sqrt{(2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})^2}=\sqrt{4\boldsymbol{a}^2+9\boldsymbol{b}^2+12\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}=\sqrt{19}$. **故B正确.**

14. 4　【解析】因为$|\boldsymbol{a}|=1$,向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$的夹角为60°,所以$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos60°=\dfrac{1}{2}|\boldsymbol{b}|$. 由$(4\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=-8$,得$4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}^2=-8$,即$|\boldsymbol{b}|^2-2|\boldsymbol{b}|-8=0$,解得$|\boldsymbol{b}|=4$(负值舍去).

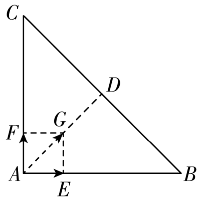
15. A　【解析】乙:$|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}|$等价于$(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=(2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a})^2$,即$4\boldsymbol{a}^2-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=4\boldsymbol{b}^2+4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}^2$. 因为$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$,所以$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,所以乙等价于$\boldsymbol{a}^2=\boldsymbol{b}^2$,即$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$. 所以甲是乙的充要条件,**故A正确.**

16. 2　【解析】$\because|\boldsymbol{a}|=\sqrt{2},|\boldsymbol{b}|=1$,$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为45°,$(\lambda\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})\perp\boldsymbol{a}$,$\therefore(\lambda\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}^2=\lambda\times\sqrt{2}\times1\times\cos45°-2=0$,解得$\lambda=2$,$\therefore$实数$\lambda$的值为2.

17. $\dfrac{\pi}{4}$　【解析】如图,在$\triangle ABC$中,设角A的平分线交BC于点D. 因为$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$,所以$AB\perp AC$. 设$\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}=\overrightarrow{AE}$,$\dfrac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}=\overrightarrow{AF}$,

记 $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AG}$，连接 FG，EG. 因为 $|\overrightarrow{AE}|=|\overrightarrow{AF}|=1$，所以四边形 $AEGF$ 为正方形，所以 AG 为角 A 的平分线，故点 G 在 AD 上.

因为 $\left(\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\dfrac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\right)\cdot\overrightarrow{BC}=0$，所以 $\overrightarrow{AG}\perp\overrightarrow{BC}$，即 $AG\perp BC$，故 $AD\perp BC$，则 $AB=AC$，$\triangle ABC$ 为等腰直角三角形，所以 $B=\dfrac{\pi}{4}$.



18.【解】（1）由向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{2}$，$|\boldsymbol{b}|=3$，且 $(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp(3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$，

可得 $(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=6\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}^2=12+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-9=0$，可得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-3$.

设向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ，可得 $\cos\theta=\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\dfrac{-3}{\sqrt{2}\times3}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

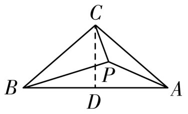
因为 $\theta\in[0,\pi]$，所以 $\theta=\dfrac{3\pi}{4}$，即向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\dfrac{3\pi}{4}$.

（2）由 $|t\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{17}$ 得 $|t\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=t^2\boldsymbol{a}^2+2t\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=2t^2-6t+9=17$，

即 $t^2-3t-4=0$，解得 $t=4$ 或 $t=-1$.

能力上分

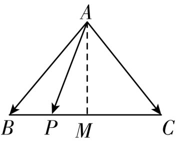
1. D 【解析】$\because\ \overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PA}-2\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}$，$(\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PA})\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PA}-2\overrightarrow{PC})=0$，$\therefore\ \overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})=0$. 设 D 为 AB 中点，连接 CD，则 $\overrightarrow{AB}\cdot2\overrightarrow{CD}=0$，$\therefore\ CD$ 垂直平分边 AB，故 $\triangle ABC$ 的形状一定为等腰三角形，**故 D 正确**.



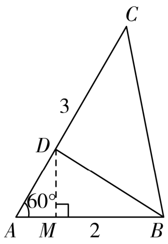
2. A 【解析】由题意可得，$\overrightarrow{OA}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 上的投影向量为 $-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$，所以 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AB}=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2=-18$，**故 A 正确**.

3. A 【解析】如图，取 BC 的中点 M，连接 AM，则 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}$，因为 $AB=AC=3$，

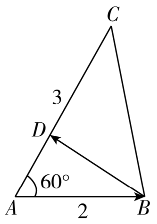
$BC=4$，所以 $AM\perp BC$，$BM=2$，所以 $AM=\sqrt{AB^2-BM^2}=\sqrt{5}$，所以 $\overrightarrow{AP}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\overrightarrow{AP}\cdot 2\overrightarrow{AM}=2|\overrightarrow{AM}||\overrightarrow{AP}|\cdot\cos\langle\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AM}\rangle=2|\overrightarrow{AM}|^2=2\times5=10$. 故 A 正确.



4. D　【解析】$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}=-\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD}=-|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BD}|\cdot\cos\langle\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BD}\rangle$. 如图，过点 D 作 $DM\perp AB$ 交 AB 于点 M，则 $|\overrightarrow{BD}|\cdot\cos\langle\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BD}\rangle=|\overrightarrow{BM}|$. 因为 $AD=\frac{1}{3}AC=1$，$\angle A=60°$，所以 $AM=\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2}$，所以 $BM=AB-AM=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$，故 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}=-2\times\frac{3}{2}=-3$.

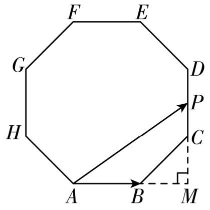


一题多解　如图，由 $\angle A=60°$，$AB=2$，$AC=3$，可得 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cdot\cos\angle A=2\times3\times\frac{1}{2}=3$. 因为 D 为边 AC 上一点，且 $\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AD}$，所以 $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，所以 $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$，所以 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}\cdot\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}^2=\frac{1}{3}\times3-2^2=-3$，故 D 正确.



5. B　【解析】$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AP}|\cdot\cos\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AP}\rangle$，显然当点 P 在线段 DC 上

时，$|\overrightarrow{AP}|\cos\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AP}\rangle$ 最大. 如图，过点 C 作 $CM\perp AB$，交 AB 的延长线于点 M，此时 $|\overrightarrow{AP}|\cos\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AP}\rangle=AM$. 又 $\angle CBM=\frac{\pi}{4}$，则 $BM=\frac{\sqrt{2}}{2}BC=\sqrt{2}$，则 $AM=2+\sqrt{2}$，则 $(\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB})_{\max}=2\times(2+\sqrt{2})=4+2\sqrt{2}$. **故 B 正确.**



6.【解】(1)因为 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{2}$，$|\boldsymbol{b}|=1$，$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\pi}{4}$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\sqrt{2}\times1\times\cos\frac{\pi}{4}=1$，$|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|^2=(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{b}^2=(\sqrt{2})^2-4\times1+4\times1^2=2$，所以 $|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}$.

(2)由(1)知，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1$. 因为 $\overrightarrow{AQ}\cdot(\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OB})=(\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OB})=(t\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OA})\cdot(t\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})=(t^2-t)\overrightarrow{OA}^2-(t-1)\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=2(t^2-t)-(t-1)=2t^2-3t+1=2\left(t-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{1}{8}\geqslant-\frac{1}{8}$，当且仅当 $t=\frac{3}{4}$ 时，等号成立，故 $\overrightarrow{AQ}\cdot(\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OB})$ 的最小值为 $-\frac{1}{8}$.

7.【解】(1)因为 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{3}$，$|\boldsymbol{b}|=4$，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{6}$，

所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}\times4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=6$.

(2)由(1)可知，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=6$，

因为 $|2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=4\boldsymbol{a}^2+4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=4\times3+4\times6+16=52$，所以 $|2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=2\sqrt{13}$.

因为 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=3-2\times6+16=7$，所以 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{7}$.

设 $2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ.

$(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=2\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}^2=2\times3-6-16=-16$,

则 $\cos\theta=\dfrac{(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})}{|2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|}=\dfrac{-16}{2\sqrt{13}\times\sqrt{7}}=-\dfrac{8\sqrt{91}}{91}$.

(3) 因为向量 $\boldsymbol{m}=3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$ 的夹角为锐角,

提示: 两个向量的夹角为锐角的充要条件是两个向量的数量积大于 0 且两个向量不同向共线

所以 $(3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b})>0$ 且 $3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$ 不同向共线.

由 $(3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b})=3\boldsymbol{a}^2+(3k-1)\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-k\boldsymbol{b}^2=3\times3+(3k-1)\times6-k\times16>0$,

解得 $k>-\dfrac{3}{2}$.

若 $3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$ 同向共线,则存在实数 $t>0$,使得 $3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=t(\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b})$,即 $3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=t\boldsymbol{a}+kt\boldsymbol{b}$.

所以 $\begin{cases}3=t,\\-1=kt,\end{cases}$ 解得 $k=-\dfrac{1}{3}$.

所以当 $3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$ 不同向共线时, $k\neq-\dfrac{1}{3}$.

综上,实数 k 的取值范围是 $\left(-\dfrac{3}{2},-\dfrac{1}{3}\right)\cup\left(-\dfrac{1}{3},+\infty\right)$.

6.2 节测上分

1. A 【解析】$\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MO}=\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{NM}+\overrightarrow{MO}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MO}=\boldsymbol{0}$. 故 A 正确.

2. D 【解析】由 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$,两边平方得 $\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$,则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,因此 $(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=-2\boldsymbol{b}^2$,所以 $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量为 $\dfrac{(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}\cdot\dfrac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=-2\boldsymbol{b}$,故 D 正确.

3. A 【解析】因为 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\perp(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})$,所以 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})=0$,即 $\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{b}^2=0$,又 $2|\boldsymbol{a}|=3|\boldsymbol{b}|\neq0$,所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{b}^2-$

$\frac{9}{4}\boldsymbol{b}^2=-\frac{1}{4}\boldsymbol{b}^2$，故 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{-\frac{1}{4}\boldsymbol{b}^2}{\frac{3}{2}\boldsymbol{b}^2}=-\frac{1}{6}$，**故 A 正确.**

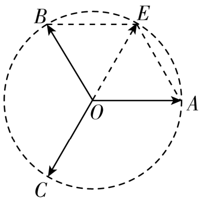
4. D 【解析】因为 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 均为单位向量，所以 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=1$.

又 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上的投影向量为$\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|^2}\cdot\boldsymbol{a}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-\frac{1}{2}$，所以 $|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|=\sqrt{(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})^2}=\sqrt{\boldsymbol{a}^2-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{b}^2}=\sqrt{1^2-4\times\left(-\frac{1}{2}\right)+4\times1^2}=\sqrt{7}$. **故 D 正确.**

5. D 【解析】当 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $t\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 反向共线时，$t=-1$. $\because$ $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $t\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的夹角为钝角，$\therefore(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(t\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})<0$ 且 $t\neq-1$，$\therefore t\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+t\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}^2=t-1+(t-1)\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=t-1+(t-1)\times1\times1\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}(t-1)<0$，解得 $t<1$，且 $t\neq-1$，**故 D 正确.**

6. D 【解析】由 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$，可得 $|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\frac{3}{2}$，当且仅当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 反向共线时，等号成立；$|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})|\geqslant||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}||=\frac{1}{2}$，当且仅当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 同向共线时，等号成立. 所以 $|\boldsymbol{b}|$ 的取值范围为 $\left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$. **故 D 正确.**

7. A 【解析】因为 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为单位向量，$\boldsymbol{p}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$，所以 $|\boldsymbol{p}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{c}|=3$，当且仅当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的方向都相同时，等号成立，如图所示，作出 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$.



当 $\angle AOB=\angle BOC=\angle COA=\frac{2\pi}{3}$ 时，以 OA,OB 为邻边作平行四边形 $OAEB$，连接 OE，则 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OE}$，且四边形 $OAEB$ 为

菱形. 由 $\angle AOE=\frac{1}{2}\angle AOB=\frac{\pi}{3}$, 可得 C, O, E 三点共线, 且 $\triangle AOE$ 为等边三角形, $|\overrightarrow{OE}|=|\overrightarrow{OA}|=1$, 所以 $\boldsymbol{p}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{0}$, 此时 $|\boldsymbol{p}|=0$. 综上所述, $0\leqslant|\boldsymbol{p}|\leqslant3$, 即 $|\boldsymbol{p}|$ 的取值范围是 $[0,3]$, **故 A 正确.**

8. 22 【**解析**】因为在直角梯形 $ABCD$ 中, 已知 $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{BF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{FC}$, $AB=5$, $AD=3$, $CD=2$, 所以 $\overrightarrow{DC}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$. 因为四边形 $ABCD$ 是直角梯形, 所以 $AB\perp AD$, 故 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=0$, 所以 $(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF})\cdot\overrightarrow{AC}=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF})\cdot(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC})=\left(\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}\right)\cdot(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC})=\left(\overrightarrow{AD}+\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AD}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}\right)=\left[\overrightarrow{AD}+\frac{6}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC})\right]\cdot\left(\overrightarrow{AD}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}\right)=\left(\overrightarrow{AD}+\frac{6}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{2}{15}\overrightarrow{AB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AD}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}\right)=\left(\frac{4}{3}\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AD}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}\right)=\frac{4}{3}|\overrightarrow{AD}|^2+\frac{8}{15}\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\frac{2}{5}|\overrightarrow{AB}|^2=\frac{4}{3}\times9+\frac{2}{5}\times25=12+10=22$.

9. 【**解**】(1) 由题易得, $|\overrightarrow{BC}|=10$, $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{AB}+\frac{4}{5}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\frac{4}{5}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{5}\overrightarrow{AC}$.

(2) 延长 AP 交 BC 于点 D, 如图所示.

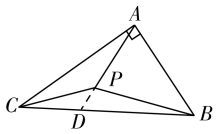
设 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AD}(\lambda\neq0)$, 则由 $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, 得 $\lambda\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, 即 $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3\lambda}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2\lambda}\overrightarrow{AC}$,

由 B, C, D 三点共线, 可得 $\frac{1}{3\lambda}+\frac{1}{2\lambda}=1$, 解

得 $\lambda=\frac{5}{6}$，则 $\overrightarrow{AD}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=-\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}=\frac{3}{5}\overrightarrow{BC}$，故 $\frac{|\overrightarrow{BD}|}{|\overrightarrow{BC}|}=\frac{3}{5}$，

所以 $S_{\triangle ACP}:S_{\triangle ABP}=CD:BD=\frac{2}{3}$.



10.【解】(1) 当 $\lambda=\frac{1}{2}$ 时，E 为 CD 的中点，可得 $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$.

若 $\overrightarrow{AN}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}$，则 $\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AB}=(x-1)\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}$. 因为 F 是 AD 的中点，所以 $\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$，结合 $\overrightarrow{BN}$ 与 $\overrightarrow{BF}$ 共线，得 $\frac{x-1}{-1}=\frac{y}{\frac{1}{2}}$ ①.

由 $\overrightarrow{AN}$ 与 $\overrightarrow{AE}$ 共线，得 $\frac{x}{\frac{1}{2}}=\frac{y}{1}$ ②. 由①②，解得 $x=\frac{1}{5}$，$y=\frac{2}{5}$，所以 $x-y=-\frac{1}{5}$.

(2) 根据题意，可得 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AD}|\cos\frac{\pi}{3}=12$.

由 $\overrightarrow{DE}=\lambda\overrightarrow{DC}=\lambda\overrightarrow{AB}$，得 $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}=\lambda\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$，则 $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AB}=(\lambda-1)\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$. 由 $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$，得 $\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AF}=\lambda\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$，所以 $\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{FE}=[(\lambda-1)\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}]\cdot\left(\lambda\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right)=(\lambda^2-\lambda)|\overrightarrow{AB}|^2+\left(\frac{3\lambda}{2}-\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}|\overrightarrow{AD}|^2=16(\lambda^2-\lambda)+12\left(\frac{3\lambda}{2}-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\times6^2=16\lambda^2+2\lambda+12$，根据二次函数的性质，当 $\lambda=-\frac{1}{16}$ 时，$\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{FE}$ 取得最小值，最小值为 $16\times\left(-\frac{1}{16}\right)^2+2\times\left(-\frac{1}{16}\right)+12=\frac{191}{16}$.

所以 $\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{FE}$ 的最小值为$\frac{191}{16}$.

6.3 平面向量基本定理及坐标表示

6.3.1 平面向量基本定理

对点上分

1. B 【解析】对于 A,若存在实数 λ_1,λ_2,使 $\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{0}$ 成立,则 $\lambda_1=\lambda_2=0$,**故 A 错误**;

对于 B,因为 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$ 是平面 α 内所有向量的一个基底,所以平面 α 内任意向量 $\boldsymbol{a}$ 都可以表示为 $\boldsymbol{a}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2$,其中 λ_1,$\lambda_2\in\mathbf{R}$,**故 B 正确**;

对于 C,根据平面向量基本定理可得,$\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2(\lambda_1,\lambda_2\in\mathbf{R})$一定在平面 α 内,**故 C 错误**;

对于 D,对于平面 α 内任意向量 $\boldsymbol{a}$,使 $\boldsymbol{a}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2$ 的实数 λ_1,λ_2 有唯一一对,**故 D 错误**.

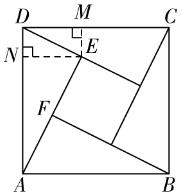
2. C 【解析】对于 A,零向量与任意向量均共线,所以这两个向量不可以作为基底,不满足题意;对于 B,因为 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2$,$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$,所以 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{b}$,所以这两个向量不可以作为基底,不满足题意;对于 C,设 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$,即 $\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2=\lambda(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)$,则 $\begin{cases}1=\lambda,\\-2=\lambda,\end{cases}$ 无解,所以这两个向量不共线,可以作为一个基底,满足题意;对于 D,因为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2$,$\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{e}_1-4\boldsymbol{e}_2$,所以 $\boldsymbol{a}=\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$,因此这两个向量不可以作为基底,不满足题意.

名师点拨 判定两个向量能否构成基底,主要看这两个向量是否为非零且不共线的向量. 一定要注意零向量不能作为基底.

3. A 【解析】因为四边形 $ABCD$ 为平行四边形,所以 $AB\parallel CD$. 易知 $\triangle AOM\backsim$

$\triangle COD$,故可得$\dfrac{OD}{OM}=\dfrac{CD}{AM}=2$,故$\overrightarrow{OM}=\dfrac{1}{3}\cdot$ $\overrightarrow{DM}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AM})=\dfrac{1}{3}\left(-\overrightarrow{AD}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)=$ $\dfrac{1}{6}\overrightarrow{AB}-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD}$. **故 A 正确.**

4. B 【解析】如图所示,过点 E 分别作 $EM\perp DC$,$EN\perp AD$,垂足分别为 M,N,可知四边形 $DMEN$ 为矩形.



不妨设 $DE=a>0$,由题意可知 $DE=AF=\dfrac{1}{2}AE=a$. 在 Rt$\triangle ADE$ 中,可得 $AD=\sqrt{AE^2+DE^2}=\sqrt{5}a$,则 $\sin\angle ADE=\dfrac{AE}{AD}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$, $\cos\angle ADE=\dfrac{DE}{AD}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$,可得 $DN=DE\cos\angle ADE=\dfrac{\sqrt{5}}{5}a$, $DM=NE=DE\cdot\sin\angle ADE=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}a$,即 $\overrightarrow{DN}=\dfrac{1}{5}\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DM}=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{DC}$,所以 $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DN}+\overrightarrow{DM}=\dfrac{1}{5}\overrightarrow{DA}+\dfrac{2}{5}\overrightarrow{DC}=\dfrac{1}{5}\boldsymbol{m}+\dfrac{2}{5}\boldsymbol{n}$. **故 B 正确.**

5. A 【解析】由 A,B,C 三点共线得 $\overrightarrow{AB}/\!/\overrightarrow{BC}$,

因为 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{e}_1-k\boldsymbol{e}_2(k\in\mathbf{R})$,$\overrightarrow{BC}=4\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_1$,$\boldsymbol{e}_2$ 不共线,所以 $\dfrac{1}{4}=\dfrac{-k}{1}$,解得 $k=-\dfrac{1}{4}$. **故选 A.**

一题多解 由 A,B,C 三点共线得 $\overrightarrow{AB}/\!/\overrightarrow{BC}$,设 $\overrightarrow{AB}=t\overrightarrow{BC}$,

因为 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{e}_1-k\boldsymbol{e}_2(k\in\mathbf{R})$,$\overrightarrow{BC}=4\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$,所以 $\boldsymbol{e}_1-k\boldsymbol{e}_2=t(4\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)$,即 $(1-4t)\boldsymbol{e}_1+(-k-t)\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{0}$,

又 e_1,e_2 不共线，所以 $\begin{cases}1-4t=0,\\-k-t=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}t=\dfrac{1}{4},\\k=-\dfrac{1}{4}.\end{cases}$ **故选 A.**

6. B 【解析】设 $BG=xBE,x\in(0,1)$. 由题意得 $\overrightarrow{BG}=x\overrightarrow{BE}=x(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CE})=x\overrightarrow{BC}+\dfrac{2x}{3}\overrightarrow{CD}=x\overrightarrow{BC}+\dfrac{2x}{3}\overrightarrow{BA}$. 因为 A,G,C 三点共线，所以 $x+\dfrac{2x}{3}=1$，解得 $x=\dfrac{3}{5}$，所以 $\overrightarrow{BG}=\dfrac{3}{5}\overrightarrow{BE}$，所以 $\overrightarrow{BF}=\lambda\overrightarrow{BE}+\mu\overrightarrow{BA}=\dfrac{5}{3}\lambda\overrightarrow{BG}+\mu\overrightarrow{BA}$. 又 A,G,F 三点共线，所以 $\dfrac{5}{3}\lambda+\mu=1$，所以 $\dfrac{3}{\lambda}+\dfrac{1}{\mu}=\left(\dfrac{3}{\lambda}+\dfrac{1}{\mu}\right)\left(\dfrac{5}{3}\lambda+\mu\right)=6+\dfrac{3\mu}{\lambda}+\dfrac{5\lambda}{3\mu}\geqslant 6+2\sqrt{\dfrac{3\mu}{\lambda}\cdot\dfrac{5\lambda}{3\mu}}=6+2\sqrt{5}$，当且仅当 $\dfrac{3\mu}{\lambda}=\dfrac{5\lambda}{3\mu}$，即 $\mu=\dfrac{\sqrt{5}}{3}\lambda$ 时，等号成立，故 $\dfrac{3}{\lambda}+\dfrac{1}{\mu}$ 的最小值为 $6+2\sqrt{5}$. **故 B 正确.**

7. $\dfrac{71}{20}$ 【解析】因为 $\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{DB}$，所以 $\overrightarrow{AD}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB}$. 因为 P 为 CD 上一点，所以可设 $\overrightarrow{CP}=k\overrightarrow{CD}(k\in(0,1))$，即 $\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AC}=k(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC})=k\left(\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)$. 又因为 $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AC}+\dfrac{3}{5}\overrightarrow{AB}(x\in\mathbf{R})$，所以 $(x-1)\overrightarrow{AC}+\dfrac{3}{5}\overrightarrow{AB}=k\left(\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)$.

又 $\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}$ 为不共线的向量，所以 $\begin{cases}x-1=-k,\\\dfrac{3}{5}=\dfrac{3}{4}k,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=\dfrac{4}{5},\\x=\dfrac{1}{5},\end{cases}$ 所以 $\overrightarrow{AP}=\dfrac{1}{5}\overrightarrow{AC}+\dfrac{3}{5}\overrightarrow{AB}$，所以 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AP}\cdot(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC})=\left(\dfrac{1}{5}\overrightarrow{AC}+\dfrac{3}{5}\overrightarrow{AB}\right)\cdot\left(\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)=-\dfrac{1}{5}\times 4^2+\dfrac{9}{20}\times5^2-\dfrac{9}{20}\times4\times5\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{71}{20}$.

能力上分

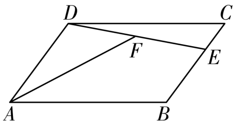
1. D 【解析】对于 A,设 $\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2=\lambda\boldsymbol{e}_1(\lambda\in\mathbf{R})$,该式无解,所以 $\boldsymbol{e}_1$ 与 $\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$ 不共线,故能作为平面内所有向量的一个基底,**故 A 不符合题意**;

对于 B,设 $\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2=\lambda(2\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)(\lambda\in\mathbf{R})$,该式无解,所以 $\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2$ 与 $2\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$ 不共线,故能作为平面内所有向量的一个基底,**故 B 不符合题意**;

对于 C,设 $\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2=\lambda(\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2)(\lambda\in\mathbf{R})$,该式无解,所以 $\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2$ 与 $\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2$ 不共线,故能作为平面内所有向量的一个基底,**故 C 不符合题意**;

对于 D,因为 $6\boldsymbol{e}_1-3\boldsymbol{e}_2=-3(\boldsymbol{e}_2-2\boldsymbol{e}_1)$,所以 $(6\boldsymbol{e}_1-3\boldsymbol{e}_2)/\!/(\boldsymbol{e}_2-2\boldsymbol{e}_1)$,所以 $6\boldsymbol{e}_1-3\boldsymbol{e}_2$ 与 $\boldsymbol{e}_2-2\boldsymbol{e}_1$ 不能作为平面内所有向量的一个基底,**故 D 符合题意. 故选 D.**

2. A 【解析】由 F 是线段 DE 的中点得 $\overrightarrow{DF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DE}$,



由 $\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{EC}$,且四边形 $ABCD$ 为平行四边形,得 $\overrightarrow{CE}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$,

则 $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CE})=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}+\frac{5}{6}\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{6}\overrightarrow{AD}$,故 $\mu=\frac{5}{6}$.

故选 A.

3. ACD 【解析】因为 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{BM}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AM}=-\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$,

所以 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BM}=\left(\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)\cdot\left(-\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}\right)=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}^2=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}-8+6=-4$,所以 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=$

3，故 C 正确.

因为 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$，

所以 $|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{\left(\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)^2}=\sqrt{\overrightarrow{AD}^2-\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}^2}=\sqrt{9-3+4}=\sqrt{10}$，故 D 正确.

设 $\overrightarrow{AO}=t\overrightarrow{AC}$，$t\in(0,1)$，则 $\overrightarrow{AO}=t\overrightarrow{AD}+\frac{t}{2}\overrightarrow{AB}$，又 B,O,M 三点共线，所以 $\exists s\in\mathbf{R}$，使 $\overrightarrow{AO}=s\overrightarrow{AM}+(1-s)\overrightarrow{AB}=\frac{2s}{3}\overrightarrow{AD}+(1-s)\overrightarrow{AB}$，由平面向量基本定理得 $\begin{cases}t=\frac{2s}{3},\\ \frac{t}{2}=1-s,\end{cases}$

提示：平面内的向量可用同一个基底唯一表示

解得 $\begin{cases}t=\frac{1}{2},\\ s=\frac{3}{4},\end{cases}$ 所以 $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$，

所以 $\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$，故 A 正确，B 错误. 故选 ACD.

4. ABD　【解析】对于 A，当 $x=\frac{1}{3}$，$y=\frac{2}{3}$ 时，$\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$，即 $3\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{AQ}$，

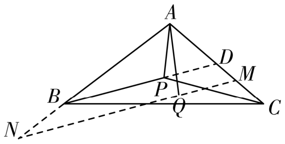
即 $\overrightarrow{BQ}=2\overrightarrow{QC}$，所以 $\frac{CQ}{BQ}=\frac{1}{2}$，故 A 正确；

对于 B，由 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{CP}$，得 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AC}=\mathbf{0}$，所以 $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，又 P,Q 两点重合，所以 $\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，

故 B 正确；

如图所示，取 AC 的中点 D，则 $\overrightarrow{AQ}=x\overrightarrow{AB}+2y\overrightarrow{AD}$，连接 BD，过点 Q 作 $MN/\!/BD$，与线段 CD 交于点 M，与射线 AB 交于点 N，设

$\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AD}, k\in[1,2]$，则 $\overrightarrow{AN}=k\overrightarrow{AB}$，因为 M,Q,N 三点共线，所以设 $\overrightarrow{AQ}=\lambda\overrightarrow{AM}+(1-\lambda)\overrightarrow{AN}=k\cdot\lambda\overrightarrow{AD}+k(1-\lambda)\overrightarrow{AB}(\lambda>0)$，由 $\overrightarrow{AQ}=x\overrightarrow{AB}+2y\overrightarrow{AD}$，得 $\begin{cases}2y=k\lambda,\\x=k(1-\lambda),\end{cases}$ 则 $x+2y=k, k\in[1,2]$，故 C 错误，D 正确. 故选 ABD.



5. $-\dfrac{1}{2}$　【解析】设 $\boldsymbol{a}-k\boldsymbol{b}=\lambda(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=2\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}, \lambda\in\mathbf{R}$，则有 $\begin{cases}1=2\lambda,\\-k=\lambda,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}\lambda=\dfrac{1}{2},\\k=-\dfrac{1}{2}.\end{cases}$

提示：利用平面向量基本定理可构造方程组

6.【解】(1) 由已知得 $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{ED}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{DC}=\dfrac{5}{6}\overrightarrow{AD}+\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})=\dfrac{5}{6}\overrightarrow{AD}+\dfrac{1}{2}\left(-\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD}\right)=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}.$

(2) 设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}, \overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，则 $\overrightarrow{EF}=\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}+\dfrac{1}{2}\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{EM}=\dfrac{\lambda}{2}\boldsymbol{a}+\dfrac{\lambda}{2}\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AP}=\mu\boldsymbol{a}$，连接 AM（图略），$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EM}=\dfrac{1}{6}\boldsymbol{b}+\dfrac{\lambda}{2}\boldsymbol{a}+\dfrac{\lambda}{2}\boldsymbol{b}=\dfrac{\lambda}{2}\boldsymbol{a}+\left(\dfrac{\lambda}{2}+\dfrac{1}{6}\right)\boldsymbol{b}$. 由 P,M,D 三点共线，设 $\overrightarrow{DM}=k\overrightarrow{DP}, k\in(0,1)$，则 $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DM}=k\overrightarrow{AP}+(1-k)\overrightarrow{AD}=k\mu\boldsymbol{a}+(1-k)\boldsymbol{b}$，

$$\therefore \begin{cases}k\mu=\dfrac{\lambda}{2},\\1-k=\dfrac{\lambda}{2}+\dfrac{1}{6},\end{cases}\quad\therefore \mu=\dfrac{3\lambda}{5-3\lambda}.$$

$\because$ 点 P 在线段 AG（不含端点）上，$\therefore \mu=\dfrac{3\lambda}{5-3\lambda}\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$，$\therefore \lambda\in\left(0,\dfrac{5}{9}\right)$，$\therefore 3\lambda^2+\dfrac{2}{1+\mu}=3\lambda^2-\dfrac{6}{5}\lambda+2=3\left(\lambda-\dfrac{1}{5}\right)^2+\dfrac{47}{25}$，当 $\lambda\in\left(0,\dfrac{5}{9}\right)$ 时，$3\lambda^2+\dfrac{2}{1+\mu}\in\left[\dfrac{47}{25},\dfrac{61}{27}\right)$.

$\therefore 3\lambda^2+\dfrac{2}{1+\mu}$ 的取值范围是 $\left[\dfrac{47}{25},\dfrac{61}{27}\right)$.

6.3.2 平面向量的正交分解及坐标表示+6.3.3 平面向量加、减运算的坐标表示+6.3.4 平面向量数乘运算的坐标表示

对点上分

1. BD 【解析】同一个向量，无论位置在哪里，坐标都一样，故A 错误，D 正确；

从原点出发的向量，其终点坐标与向量的坐标相同，故 B 正确；

以点 A 为终点的向量有无数个，它们不一定全相等，故 C 错误.

2. C 【解析】记 O 为坐标原点，则 $\overrightarrow{OA}=2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}$，$\overrightarrow{OB}=4\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}$，所以 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}$，故 C 正确.

3. A 【解析】因为 $\boldsymbol{a}=(1,-6)$，$\boldsymbol{b}=(-1,0)$，所以 $\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}=(-2,-6)$，故 A 正确.

4. B 【解析】设 O 为坐标原点，$\because \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}-(-1,2)=(3,-6)$，$\therefore \overrightarrow{OB}=(-1,2)+(3,-6)=(2,-4)$，$\therefore B(2,-4)$，故 B 正确.

5. B 【解析】因为 $A(3,1)$，$B(-2,2)$，所以 $\overrightarrow{AB}=(-5,1)$. 因为 O 是坐标原点，所以 $\overrightarrow{OA}=(3,1)$，所以 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{OA}=(-2,2)$，故 B 正确.

6. BD 【解析】设 $\boldsymbol{b}=(x,y)$. 因为向量 $\boldsymbol{a}=(1,-2)$，$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，所以 $-2x-y=0$，可化为 $y=-2x$ ①.

又因为 $|\boldsymbol{b}|=4|\boldsymbol{a}|$，所以 $\sqrt{x^2+y^2}=4\times\sqrt{1^2+(-2)^2}$，可化为 $x^2+y^2=80$ ②.

由①②解得 $\begin{cases}x=4,\\y=-8\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-4,\\y=8,\end{cases}$

即 $\boldsymbol{b}$ 的坐标可能是 $(4,-8)$，也可能是 $(-4,8)$. 故选 BD.

7. ABD 【解析】由向量共线的条件可知，A，B 正确，C 错误；对于 D，$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(6,12)$，$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(4,8)$，所以

$\overrightarrow{AC}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$，所以 A,B,C 三点共线，故 D 正确.

8. C 【解析】由题意得 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(3x,x+4)$，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}=(6,10)$. 因为 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})/\!/(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})$，所以 $30x=6x+24$，解得 $x=1$，则 $\boldsymbol{c}=m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}=(m,3m)+(2n,2n)=(m+2n,3m+2n)=(5,7)$，即 $\begin{cases}m+2n=5,\\3m+2n=7,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=1,\\n=2,\end{cases}$

故 $m+n=3$. 故 C 正确.

9. 【解】(1) $\because$ 顶点 B,C 的坐标分别是 $(-1,3)$，$(3,4)$，$\therefore \overrightarrow{BC}=(3,4)-(-1,3)=(4,1)$.

(2) 设 $A(x,y)$，$\because D(2,2)$，

$\therefore \overrightarrow{AD}=(2-x,2-y)$. $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，$\therefore \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$，$\therefore (2-x,2-y)=(4,1)$，

即 $\begin{cases}2-x=4,\\2-y=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=-2,\\y=1,\end{cases}$ $\therefore$ 顶点 A 的坐标为 $(-2,1)$.

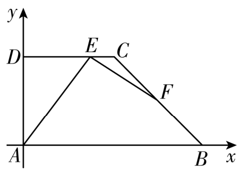
6.3.5 平面向量数量积的坐标表示

对点上分

1. D 【解析】$\because \boldsymbol{a}=(2,0)$，$\boldsymbol{b}=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，

$\therefore \boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}^2=2\times\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=0$. 故 D 正确.

2. A 【解析】以 A 为原点，AB,AD 所在的直线分别为 x,y 轴，建立如图所示的平面直角坐标系，则 $A(0,0)$，$F\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$.



设 $E(x,1)$，$x\in[0,1]$，则 $\overrightarrow{EA}=(-x,-1)$，$\overrightarrow{EF}=\left(\frac{3}{2}-x,-\frac{1}{2}\right)$，

所以 $\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{EF}=-x\left(\frac{3}{2}-x\right)+\frac{1}{2}=\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{1}{16}\in\left[-\frac{1}{16},\frac{1}{2}\right]$.

提示：函数 $y=\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{1}{16}$ 在 $\left[0,\frac{3}{4}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{3}{4},1\right]$ 上单调递增

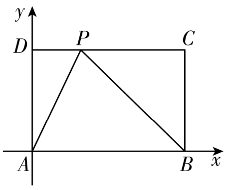
3. A 【解析】由向量 $\boldsymbol{b}$ 在向量 $\boldsymbol{a}$ 上的投影向量为 $\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|^2}\cdot\boldsymbol{a}=\frac{2\sin\alpha}{4}\cdot(2,0)=(\sin\alpha,0)=\left(\frac{1}{2},0\right)$，

所以 $\sin\alpha=\frac{1}{2}$，所以 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(2,0)+\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\left(\frac{5}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，

所以 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{7}$. **故选 A.**

4. B 【解析】以 A 为坐标原点，AB 所在的直线为 x 轴，AD 所在的直线为 y 轴，建立如图所示的平面直角坐标系，所以 $A(0,0)$，$B(6,0)$，$C(6,4)$，$D(0,4)$. 设点 P 的坐标为 (x,y)，则 $\overrightarrow{DP}=(x,y-4)$，$\overrightarrow{DC}=(6,0)$. 因为 $\overrightarrow{DP}=\lambda\overrightarrow{DC}$，所以 $(x,y-4)=\lambda(6,0)$，所以 $x=6\lambda$，$y=4$，即 $P(6\lambda,4)$，所以 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=(-6\lambda,-4)+(6-6\lambda,-4)=(6-12\lambda,-8)$，所以 $|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}|=\sqrt{(6-12\lambda)^2+(-8)^2}=\sqrt{36(2\lambda-1)^2+64}$.

因为 $\lambda\in\left[0,\frac{2}{3}\right]$，所以当 $\lambda=\frac{1}{2}$ 时，$|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}|_{\min}=8$；当 $\lambda=0$ 时，$|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}|_{\max}=10$. 所以 $|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}|$ 的取值范围是 $[8,10]$. **故 B 正确.**



5. A 【解析】$\because$ 向量 $\boldsymbol{a}=(1,1)$，$\therefore |\boldsymbol{a}|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$，$\because \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\sqrt{6}$，$|\boldsymbol{b}|=2$，

$\therefore |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=2\sqrt{2}\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\sqrt{6}$,

$\therefore \cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. $\because 0\leqslant\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\leqslant\pi$,

$\therefore \langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\pi}{6}$. **故 A 正确.**

6. $\dfrac{4}{5}$　$(-\infty,0)\cup(0,5)$　【解析】设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ,则由 $\boldsymbol{a}=(1,2)$,$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(2,1)$,可得 $\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|}=\dfrac{4}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\dfrac{4}{5}$. 由题意,$\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}=(1+\lambda,2-\lambda)$,设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$ 的夹角为 β,则由 β 为锐角,可得

$$\begin{cases}\cos\beta=\dfrac{5-\lambda}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{2\lambda^2-2\lambda+5}}>0,\\ \cos\beta=\dfrac{5-\lambda}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{2\lambda^2-2\lambda+5}}\neq1,\end{cases}$$

解得 $\lambda<0$ 或 $0<\lambda<5$,故实数 λ 的取值范围为 $(-\infty,0)\cup(0,5)$.

易错警示 对夹角的理解出现错误而致错

若两向量的夹角为锐角,则它们的数量积为正,反之不成立. 因为两向量同向共线时,夹角为 $0°$,其数量积也为正. 同理,若两向量的夹角为钝角,则它们的数量积为负,反之不成立. 因为两向量反向共线时,夹角为平角,即 $180°$,其数量积也为负.

规律总结 两个非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角 θ 满足 $0°\leqslant\theta\leqslant180°$,且 $\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$. 若 $\cos\theta=1$,则 $\theta=0°$;若 $\cos\theta=0$,则 $\theta=90°$;若 $\cos\theta=-1$,则 $\theta=180°$;若 $\cos\theta<0$ 且 $\cos\theta\neq-1$,则 θ 为钝角;若 $\cos\theta>0$ 且 $\cos\theta\neq1$,则 θ 为锐角.

7. AB　【解析】对于 A,$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{t^2+1}\geqslant1$,故 $|\boldsymbol{a}|$ 的最小值为 1,**故 A 正确**;对于 B,若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$,则 $t\times2+1\times t=0$,即 $t=0$,**故 B 正确**;对于 C,若 $t=1$,则 $\boldsymbol{a}=(1,1)$,则与 $\boldsymbol{a}$ 垂直的单位向量为 $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 或 $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\right.$

$\left.\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,**故 C 错误**;对于 D,若向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为钝角,则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}<0$ 且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线,即$\begin{cases}2t+t<0,\\ t^2\neq 2,\end{cases}$ 即 $t<0$ 且 $t\neq-\sqrt{2}$,**故 D 错误**.

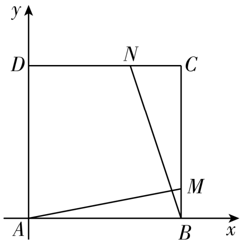
8.【解】$\overrightarrow{OP}=(2\lambda,1-\lambda)$,$\overrightarrow{AB}=(-2,1)$,$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AB}=-4\lambda+1-\lambda=0$,得 $\lambda=\frac{1}{5}$,则 $|\overrightarrow{OP}|=\sqrt{\frac{4}{25}+\frac{16}{25}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

能力上分

1. C

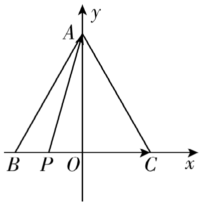
攻略上分 题目中给出了正方形,可以直接建立平面直角坐标系,将向量问题转化为坐标运算.

【解析】以 A 为坐标原点,建立如图所示的平面直角坐标系,根据题意可得 $A(0,0)$,$B(6,0)$,$M(6,1)$,$N(4,6)$,$\therefore \overrightarrow{BN}=(-2,6)$,$\overrightarrow{AM}=(6,1)$,$\therefore \overrightarrow{BN}\cdot\overrightarrow{AM}=-2\times6+6\times1=-6$. **故 C 正确**.



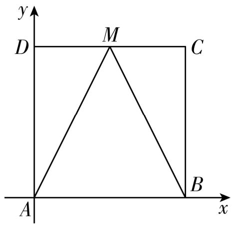
2. A 【解析】由向量 $\boldsymbol{a}=(0,1)$,$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(-2,x)$,得 $2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}-2(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=(0,1)-2(-2,x)=(4,1-2x)$,由 $\boldsymbol{a}\perp(2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$,得 $\boldsymbol{a}\cdot(2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=1-2x=0$,所以 $x=\frac{1}{2}$. **故选 A**.

3. B 【解析】取 BC 的中点 O,连接 AO,以 O 为坐标原点,OC,OA 所在直线分别为 x,y 轴,建立如图所示的平面直角坐标系,则 $A(0,2\sqrt{3})$,$C(2,0)$,设 $P(x,0)$ $(-2\leqslant x\leqslant 2)$,所以 $\overrightarrow{PA}=(-x,2\sqrt{3})$,$\overrightarrow{PC}=(2-x,0)$,即 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}=-x(2-x)+0=x^2-2x$. 因为 $-2\leqslant x\leqslant 2$,所以 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}\in[-1,8]$,故 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}$ 的最小值为 -1. **故选 B**.



一题多解 由题意，在等边三角形 ABC 中，$BC=4$. 设 $\overrightarrow{PC}=\lambda\overrightarrow{BC}(0\leqslant\lambda\leqslant 1)$，则 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}=(\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{CA})\cdot\overrightarrow{PC}=(\lambda\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA})\cdot\lambda\overrightarrow{BC}=\lambda^2\cdot\overrightarrow{BC}^2+\overrightarrow{CA}\cdot\lambda\overrightarrow{BC}=16\lambda^2+\lambda\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BC}=16\lambda^2+\lambda\times4\times4\times\cos 120°=16\lambda^2-8\lambda=16\left(\lambda-\frac{1}{4}\right)^2-1$，当 $\lambda=\frac{1}{4}$ 时，$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}$ 取得最小值 -1. **故 B 正确.**

4. ABD 【解析】以 A 为原点，AB，AD 所在直线分别为 x，y 轴，建立如图所示的平面直角坐标系，因为四边形 $ABCD$ 是边长为 1 的正方形，M 是线段 CD 上的动点，则 $A(0,0)$，$B(1,0)$，$C(1,1)$，$D(0,1)$，设 $M(x,1)(0\leqslant x\leqslant 1)$.



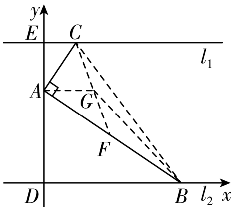
则 $\overrightarrow{AM}=(x,1)$，$\overrightarrow{BC}=(0,1)$，所以 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}=1$，**故 A 正确；**

$\overrightarrow{AD}=(0,1)$，$\overrightarrow{MC}=(1-x,0)$，$\overrightarrow{AM}=(x,1)$，因为 $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AM}$，所以 $1-x=x$，解得 $x=\frac{1}{2}$，则 M 为线段 CD 的中点，**故 B 正确；**

$\overrightarrow{MA}=(-x,-1)$，$\overrightarrow{MB}=(1-x,-1)$，则 $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=(1-2x,-2)$，所以 $|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}|=\sqrt{(1-2x)^2+4}$，则当 $x=\frac{1}{2}$ 时，$|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}|$ 取得最小值 2，**故 C 错误；**

当 $x=0$ 或 $x=1$ 时，$|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}|$ 取得最大值 $\sqrt{5}$，**故 D 正确. 故选 ABD.**

5. ABC 【解析】设 AB 的中点为 F，连接 CF，BC. 因为 $l_1/\!/l_2$，$ED\perp l_1$，所以 $ED\perp l_2$，以 D 为原点，$\overrightarrow{DB}$，$\overrightarrow{DE}$ 的方向分别为 x，y 轴的正方向，建立如图所示的平面直角坐标系.



则 $A(0,2)$，设 $C(m,3)$，$B(n,0)$，$G(x,y)$，$m,n,x,y\in\mathbf{R}$，且 $m,n\neq 0$，

所以 $\overrightarrow{AC}=(m,1)$，$\overrightarrow{AB}=(n,-2)$，

因为 $AC\perp AB$，所以 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，

即 $mn-2=0$，故 $n=\dfrac{2}{m}$，即 $B\left(\dfrac{2}{m},0\right)$，

所以 $\overrightarrow{GA}=(-x,2-y)$，$\overrightarrow{GB}=\left(\dfrac{2}{m}-x,-y\right)$，$\overrightarrow{GC}=(m-x,3-y)$。

因为 $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\mathbf{0}$，所以 $\begin{cases}\dfrac{2}{m}+m-3x=0,\\ 5-3y=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x=\dfrac{2+m^2}{3m},\\ y=\dfrac{5}{3},\end{cases}$

因为 $\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\left(\dfrac{2+m^2}{3m},-\dfrac{1}{3}\right)$，$\overrightarrow{AG}=(x,y-2)=\left(\dfrac{2+m^2}{3m},-\dfrac{1}{3}\right)$，故 $\overrightarrow{AG}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，**故 A 正确.**

因为 $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\mathbf{0}$，所以 $\overrightarrow{GC}=-(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB})$，即 $\overrightarrow{GC}=-2\overrightarrow{GF}$，

所以 G,C,F 三点共线，且 G 为 FC 上靠近 F 的三等分点，连接 GA,GB，所以 $S_{\triangle GAB}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{6}|\overrightarrow{AC}|\cdot|\overrightarrow{AB}|=\dfrac{1}{6}\sqrt{m^2+1}\cdot\sqrt{\dfrac{4}{m^2}+4}=\dfrac{1}{3}\sqrt{(m^2+1)\left(\dfrac{1}{m^2}+1\right)}=\dfrac{1}{3}\sqrt{m^2+\dfrac{1}{m^2}+2}\geqslant\dfrac{1}{3}\sqrt{2\sqrt{m^2\cdot\dfrac{1}{m^2}}+2}=\dfrac{2}{3}$，

当且仅当 $m^2=\dfrac{1}{m^2}$，即 $m=\pm1$ 时取等号，

故 B 正确.

因为 $\overrightarrow{AG}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\left(\dfrac{2+m^2}{3m},-\dfrac{1}{3}\right)$，

所以 $|\overrightarrow{AG}|=\sqrt{\left(\dfrac{2+m^2}{3m}\right)^2+\dfrac{1}{9}}$

$=\sqrt{\dfrac{\dfrac{4}{m^2}+m^2+4}{9}+\dfrac{1}{9}}$

$\geqslant\sqrt{\dfrac{2\sqrt{\dfrac{4}{m^2}\cdot m^2}+4}{9}+\dfrac{1}{9}}=1$，

当且仅当$\frac{4}{m^2}=m^2$，即 $m=\pm\sqrt{2}$ 时取等号，

故$|\overrightarrow{AG}|\geqslant 1$，**故 C 正确.**

因为 $\overrightarrow{GA}=\left(-\frac{2+m^2}{3m},\frac{1}{3}\right)$，$\overrightarrow{GB}=\left(\frac{-m^2+4}{3m},-\frac{5}{3}\right)$，

所以 $\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB}=-\frac{2+m^2}{3m}\cdot\frac{-m^2+4}{3m}-\frac{5}{9}=\frac{m^2-\frac{8}{m^2}-7}{9}$，

因为 $m\in\mathbf{R}$ 且 $m\neq 0$，所以 $m^2>0$，

设 $f(x)=x-\frac{8}{x}-7$，$x>0$，由函数 $y=x$ 和 $y=-\frac{8}{x}$ 在$(0,+\infty)$上单调递增，

可知 $f(x)$ 在$(0,+\infty)$上单调递增，没有最值，即 $\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB}$ 没有最值，**故 D 错误.**

故选 ABC.

6.【解】(1)由 $\boldsymbol{a}=(4,-2)$，可得 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{4^2+(-2)^2}=2\sqrt{5}$.

因为 $\boldsymbol{c}=x\boldsymbol{a}+(1-x)\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-8$，

所以 $\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=[x\boldsymbol{a}+(1-x)\boldsymbol{b}]\cdot\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{a}^2+(1-x)\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=20x-8(1-x)=0$，解得 $x=\frac{2}{7}$.

(2)因为 $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 共线，所以 $\exists\lambda\in\mathbf{R}$，使 $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{c}$，即 $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=\lambda x\boldsymbol{a}+\lambda(1-x)\boldsymbol{b}$，

则$\begin{cases}\lambda x=1,\\ \lambda(1-x)=-2,\end{cases}$解得 $\lambda=x=-1$，故 $\boldsymbol{c}=-\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$.

由 $|\boldsymbol{c}|^2=(-\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{b}^2=20-4\times(-8)+4\times5=72$，可得 $|\boldsymbol{c}|=6\sqrt{2}$.

又 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2}=\sqrt{\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2}=\sqrt{20+2\times(-8)+5}=3$，

$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(-\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})=-\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{b}^2=-20-8+10=-18$，

故 $\cos\langle\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\rangle=\frac{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|}=\frac{-18}{3\times6\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

一题多解 (1)设 $\boldsymbol{b}=(m,n)$，依题意可得$\begin{cases}m^2+n^2=5,\\ 4m-2n=-8,\end{cases}$

解得$\begin{cases}m=-1,\\n=2\end{cases}$或$\begin{cases}m=-\dfrac{11}{5},\\n=-\dfrac{2}{5}.\end{cases}$

①当 $\boldsymbol{b}=(-1,2)$ 时，$\boldsymbol{c}=x\boldsymbol{a}+(1-x)\boldsymbol{b}=x(4,-2)+(1-x)(-1,2)=(5x-1,2-4x)$，由 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{c}$，可得 $4\times(5x-1)-2\times(2-4x)=0$，解得 $x=\dfrac{2}{7}$.

②当 $\boldsymbol{b}=\left(-\dfrac{11}{5},-\dfrac{2}{5}\right)$ 时，$\boldsymbol{c}=x\boldsymbol{a}+(1-x)\cdot\boldsymbol{b}=x(4,-2)+(1-x)\left(-\dfrac{11}{5},-\dfrac{2}{5}\right)=\left(\dfrac{31}{5}x-\dfrac{11}{5},-\dfrac{8}{5}x-\dfrac{2}{5}\right)$，由 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{c}$，可得 $4\times\left(\dfrac{31}{5}x-\dfrac{11}{5}\right)-2\times\left(-\dfrac{8}{5}x-\dfrac{2}{5}\right)=0$，解得 $x=\dfrac{2}{7}$.

综上，$x=\dfrac{2}{7}$.

(2) 由(1)知，①当 $\boldsymbol{b}=(-1,2)$ 时，$\boldsymbol{c}=(5x-1,2-4x)$，$\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=(6,-6)$，

因为 $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 共线，所以 $-6\times(5x-1)-6\times(2-4x)=0$，解得 $x=-1$，

所以 $\boldsymbol{c}=(-6,6)$，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(3,0)$，

则 $\cos\langle\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\rangle=\dfrac{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|}=\dfrac{-18}{3\times6\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

②当 $\boldsymbol{b}=\left(-\dfrac{11}{5},-\dfrac{2}{5}\right)$ 时，$\boldsymbol{c}=\left(\dfrac{31}{5}x-\dfrac{11}{5},-\dfrac{8}{5}x-\dfrac{2}{5}\right)$，$\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=\left(\dfrac{42}{5},-\dfrac{6}{5}\right)$，

因为 $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 共线，所以 $-\dfrac{6}{5}\times\left(\dfrac{31}{5}x-\dfrac{11}{5}\right)-\dfrac{42}{5}\times\left(-\dfrac{8}{5}x-\dfrac{2}{5}\right)=0$，解得 $x=-1$，

所以 $\boldsymbol{c}=\left(-\dfrac{42}{5},\dfrac{6}{5}\right)$，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\left(\dfrac{9}{5},-\dfrac{12}{5}\right)$，则 $\cos\langle\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\rangle=\dfrac{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|}=\dfrac{-18}{3\times6\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

综上，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 的夹角的余弦值为 $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

6.3 节测上分

1. A 【解析】因为 $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AE}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\frac{3}{4}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}=x\overrightarrow{AD}+y\overrightarrow{AB}$，所以 $x=\frac{1}{4}$，$y=\frac{3}{4}$，$x+y=1$. **故选 A.**

2. C 【解析】因为向量 $\overrightarrow{OA}=(1,-1)$，$\overrightarrow{OB}=(5,m)(m\in\mathbf{R})$，$\overrightarrow{OC}=(7,3)$，所以 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(4,m+1)$，$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(6,4)$. 若 A,B,C 三点共线，则 $\overrightarrow{AB}/\!/\overrightarrow{AC}$，所以 $4\times4=6(m+1)$，解得 $m=\frac{5}{3}$. **故 C 正确.**

3. B 【解析】易知 $\overrightarrow{AB}=(1,-1)$，$\overrightarrow{DC}=(2,-2)$，$\overrightarrow{BC}=(-2,-2)$，$\overrightarrow{DA}=(3,1)$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0$，$\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{BC}=0$，故 $\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{AB}$，$AB\perp BC$，$CD\perp BC$，所以四边形 $ABCD$ 为直角梯形. **故 B 正确.**

4. AD 【解析】$\because$ $\boldsymbol{a}=(2,0)$，$\boldsymbol{b}=(1,\sqrt{3})$，$\therefore$ $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2$，**故 A 正确**；$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(3,\sqrt{3})$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(1,-\sqrt{3})$，$\therefore$ $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{9+3}=2\sqrt{3}$，$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{1+3}=2$，$\therefore$ $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\neq|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$，**故 B 错误**；显然 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线，故 $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\}$ 可以作为一个基底，**故 C 错误**；$\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上的投影向量为 $\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|^2}\boldsymbol{a}=\frac{2}{2^2}\boldsymbol{a}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$，**故 D 正确.**

5. CD 【解析】因为 $\boldsymbol{a}=(0,-1)$，$\boldsymbol{b}=(2,2)$，$\boldsymbol{c}=(3,-4)$，所以 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}=(0,-1)+2(2,2)=(4,3)$，则 $(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=4\times3-4\times3=0$，故 $(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{c}$，显然 $(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})/\!/\boldsymbol{c}$ 不成立，**故 C 正确，A 错误**；

易知 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}=(0,-1)+(3,-4)=(3,-5)$，则 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}|=\sqrt{3^2+(-5)^2}=\sqrt{34}$，**故 B 错误**；

易知 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(0,-1)+(2,2)=(2,1)$，则 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=2^2+1^2=5$，又 $|\boldsymbol{c}|=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$，所以 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{c}|$，**故 D 正确.**

6. A 【解析】因为 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，所以 $-1\times\lambda+2=0$，解得 $\lambda=2$，所以 $\boldsymbol{b}=(2,1)$，所以 $3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(-1,7)$，$\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=(-5,0)$，所以 $\cos\langle 3\boldsymbol{a}+$

$\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{(3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})}{|3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}||\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|}=\dfrac{5}{\sqrt{1+49}\times 5}=\dfrac{\sqrt{2}}{10}$. 故 A 正确.

7. A 【解析】设 $\overrightarrow{DO}=k\overrightarrow{DC}, k\in\mathbf{R}$, 则 $\overrightarrow{DO}=k(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BD})=k\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BA}\right)=k\left(\overrightarrow{AC}-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}\right)$, 所以 $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DO}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DO}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}+k\left(\overrightarrow{AC}-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}\right)=\dfrac{2}{3}(1-k)\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{AC}$①.

设 $\overrightarrow{BO}=\mu\overrightarrow{BE}, \mu\in\mathbf{R}$, 则 $\overrightarrow{BO}=\mu(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CE})=\mu\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{4}\overrightarrow{CA}\right)=\mu\left(\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)$,

所以 $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{AB}+\mu\left(\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=(1-\mu)\overrightarrow{AB}+\dfrac{\mu}{4}\overrightarrow{AC}$②.

由①②知 $\begin{cases}\dfrac{2}{3}(1-k)=1-\mu,\\ k=\dfrac{\mu}{4},\end{cases}$ 则 $\begin{cases}k=\dfrac{1}{10},\\ \mu=\dfrac{2}{5},\end{cases}$ 故 $\overrightarrow{AO}=\dfrac{3}{5}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{10}\overrightarrow{AC}$,

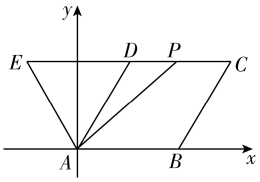
由 $\overrightarrow{AO}=\lambda\overrightarrow{OF}$, 可得 $\overrightarrow{AF}=\dfrac{\lambda+1}{\lambda}\overrightarrow{AO}=\dfrac{\lambda+1}{\lambda}\cdot\left(\dfrac{3}{5}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{10}\overrightarrow{AC}\right)=\dfrac{3\lambda+3}{5\lambda}\overrightarrow{AB}+\dfrac{\lambda+1}{10\lambda}\overrightarrow{AC}$,

由 B, F, C 共线, 可知 $\dfrac{3\lambda+3}{5\lambda}+\dfrac{\lambda+1}{10\lambda}=1$, 解得 $\lambda=\dfrac{7}{3}$. 故选 A.

关键点拨 令 $\overrightarrow{DO}=k\overrightarrow{DC}=k\left(\overrightarrow{AC}-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}\right), k\in\mathbf{R}, \overrightarrow{BO}=\mu\overrightarrow{BE}=\mu\left(\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right), \mu\in\mathbf{R}$, 则 $\overrightarrow{AO}=\dfrac{2}{3}(1-k)\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{AC}$ 且 $\overrightarrow{AO}=(1-\mu)\overrightarrow{AB}+\dfrac{\mu}{4}\overrightarrow{AC}$, 利用不同参数及 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ 表示出 $\overrightarrow{AO}$ 为解题关键.

8. BC 【解析】以 A 为坐标原点, 建立平面直角坐标系, 如图所示. 设菱形 $ABCD$ 的边长为 2, 则 $A(0,0), B(2,0), C(3,\sqrt{3}), D(1,\sqrt{3}), E(-1,\sqrt{3})$. 设 $P(x,y)$, 则由

$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AE}$，可得$(x,y)=\lambda(2,0)+\mu(-1,\sqrt{3})$，即$\begin{cases}x=2\lambda-\mu,\\y=\sqrt{3}\mu,\end{cases}$整理得$\lambda+\mu=\dfrac{x+\sqrt{3}y}{2}$. 当点$P$在线段$AB$上时，有$\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 2,\\y=0,\end{cases}$故$\lambda+\mu\in[0,1]$；当点$P$在线段$BC$上时，有$\begin{cases}2\leqslant x\leqslant 3,\\y=\sqrt{3}x-2\sqrt{3},\end{cases}$故$\lambda+\mu\in[1,3]$；当点$P$在线段$CD$上时，有$\begin{cases}1\leqslant x\leqslant 3,\\y=\sqrt{3},\end{cases}$故$\lambda+\mu\in[2,3]$；当点$P$在线段$AD$上时，有$\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 1,\\y=\sqrt{3}x,\end{cases}$故$\lambda+\mu\in[0,2]$. 当$\lambda+\mu=1$时，点$P$可位于$B$点或$AD$的中点处，**故A错误**；当$\lambda+\mu=2$时，点$P$可位于$BC$的中点或$D$点处，**故B正确**；$0\leqslant\lambda+\mu\leqslant 3$，故$\lambda+\mu$的最小值为0，最大值为3，**故C正确，D错误**.



9.【解】(1)由题意知，$\overrightarrow{AB}=(3,4)$，$\overrightarrow{AC}=(-1,2)$. 因为$(\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC})\perp(\overrightarrow{AB}-t\overrightarrow{AC})$，所以$(\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{AB}-t\overrightarrow{AC})=\overrightarrow{AB}^2-t^2\overrightarrow{AC}^2=0$，即$25-5t^2=0$，解得$t=\pm\sqrt{5}$.

(2)由(1)知，$\overrightarrow{AB}=(3,4)$，$\overrightarrow{AC}=(-1,2)$，所以$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=5$，则$\boldsymbol{a}=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\cdot\dfrac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}=\overrightarrow{AC}=(-1,2)$.

10.(1)**【证明】**连接AF，BF(图略). 由题意知，$\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{BG}-\overrightarrow{BA}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}$，$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{BF}-\overrightarrow{BA}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BE})-\overrightarrow{BA}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BE}-\overrightarrow{BA}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BA}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}-\dfrac{3}{4}\overrightarrow{BA}$，

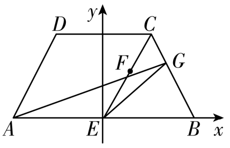
所以$\overrightarrow{AG}=\dfrac{4}{3}\overrightarrow{AF}$，又$AG$与$AF$有公共点$A$，所以$A,F,G$三点共线.

(2)**【解】**在梯形$ABCD$中，$AB/\!/CD$，$AB=2CD$，$AD=CD=1$，$\angle DAB=\dfrac{\pi}{3}$，易得$BC=$

1，$\angle ABC=\dfrac{\pi}{3}$. 设 $\overrightarrow{BG}=\lambda\overrightarrow{BC}(0\leqslant\lambda\leqslant1)$.

方法一：$\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{BG}-\overrightarrow{BE}=\lambda\overrightarrow{BC}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BA}$，$\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{BG}-\overrightarrow{BA}=\lambda\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}$，所以 $\overrightarrow{EG}\cdot\overrightarrow{AG}=\left(\lambda\overrightarrow{BC}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BA}\right)\cdot(\lambda\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA})=\lambda^2\overrightarrow{BC}^2-\dfrac{3}{2}\lambda\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BA}^2=\lambda^2-\dfrac{3}{2}\lambda+2=\left(\lambda-\dfrac{3}{4}\right)^2+\dfrac{23}{16}\geqslant\dfrac{23}{16}$，当且仅当 $\lambda=\dfrac{3}{4}$ 时，等号成立，所以 $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{EG}$ 的最小值为 $\dfrac{23}{16}$.

方法二：以 E 为坐标原点建立如图所示的平面直角坐标系，则 $E(0,0)$，$A(-1,0)$，$B(1,0)$，$C\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.



设 $G(x_0,y_0)$，则 $\overrightarrow{BG}=(x_0-1,y_0)$，$\overrightarrow{BC}=\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，因为 $\overrightarrow{BG}=\lambda\overrightarrow{BC}$，所以 $(x_0-1,y_0)=\lambda\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，可得 $G\left(-\dfrac{1}{2}\lambda+1,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\lambda\right)$，因此 $\overrightarrow{AG}=\left(-\dfrac{1}{2}\lambda+2,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\lambda\right)$，$\overrightarrow{EG}=\left(-\dfrac{1}{2}\lambda+1,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\lambda\right)$，故 $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{EG}=\left(-\dfrac{1}{2}\lambda+2\right)\left(-\dfrac{1}{2}\lambda+1\right)+\dfrac{3}{4}\lambda^2=\lambda^2-\dfrac{3}{2}\lambda+2=\left(\lambda-\dfrac{3}{4}\right)^2+\dfrac{23}{16}\geqslant\dfrac{23}{16}$，当且仅当 $\lambda=\dfrac{3}{4}$ 时，等号成立，所以 $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{EG}$ 的最小值为 $\dfrac{23}{16}$.

11.【解】(1) 依题意，$|\boldsymbol{e}_1|=|\boldsymbol{e}_2|=1$，$\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2=|\boldsymbol{e}_1||\boldsymbol{e}_2|\cos 60^\circ=\dfrac{1}{2}$. 由 $\boldsymbol{a}=(1,2)$，$\boldsymbol{b}=(2,-3)$，得 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2+2\boldsymbol{e}_1-3\boldsymbol{e}_2=3\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$，所以 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=(3\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2)^2=9\boldsymbol{e}_1^2+\boldsymbol{e}_2^2-2\times3\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2=10-2\times3\times\dfrac{1}{2}=7$，所以 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{7}$.

(2) 由题意可知，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{e}_1\sin\theta+2\boldsymbol{e}_2)-(\boldsymbol{e}_1\cos\theta+\boldsymbol{e}_2)=(\sin\theta-\cos\theta)\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$，则 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=[(\sin\theta-\cos\theta)\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2]^2=(\sin\theta-\cos\theta)^2\boldsymbol{e}_1^2+2(\sin\theta-\cos\theta)\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_2^2=(\sin\theta-\cos\theta)^2+\sin\theta-\cos\theta+1$，所以 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{(\sin\theta-\cos\theta)^2+\sin\theta-\cos\theta+1}$. 令 $t=\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$，且 $\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$，所以 $0\leqslant\theta-\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{\pi}{4}$，所以 $0\leqslant\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$，则 $t\in[0,1]$，则 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{t^2+t+1}=\sqrt{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$，故当 $t=1$，即 $\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$，即 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时，$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$ 取得最大值 $\sqrt{3}$.

专题上分 1　平面向量问题的求解

1. A　【解析】依题意有 $\overrightarrow{EC}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{BE}=\frac{1}{3}\times\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{CF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$，所以 $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$，所以 $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$，所以 $\lambda=\frac{3}{4}$，$\mu=\frac{2}{3}$，所以 $\frac{\lambda}{\mu}=\frac{\frac{3}{4}}{\frac{2}{3}}=\frac{9}{8}$. 故 A 正确.

2. **思路导引**　(1) 结合向量的线性运算，用 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}$ 表示出向量 $\overrightarrow{EF}$，即可求出 x,y 的值，代入计算即可；(2) 将 $\overrightarrow{AC}$ 也用 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}$ 表示，结合已知条件和数量积的定义求解即可.

【解】(1) $\because$ $\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{CF}=2\overrightarrow{FD}$，$\therefore$ $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}-\frac{2}{3}\overrightarrow{DC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$，又

$\overrightarrow{EF}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}$，∴ $x=-\frac{2}{3}$，$y=\frac{1}{2}$，故 $3x+2y=3\times\left(-\frac{2}{3}\right)+2\times\frac{1}{2}=-1$.

(2) ∵ $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$，∴ $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{EF}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})\cdot\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}^2-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}^2-\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$，

又∵ $|\overrightarrow{AB}|=6$，$|\overrightarrow{AD}|=4$，$\angle BAD=60°$，

∴ $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}^2-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}^2-\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\times16-\frac{2}{3}\times36-\frac{1}{6}\times6\times4\times\cos60°=8-24-2=-18$，

故 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{EF}$ 的值为 -18.

3. **思路导引** (1) 根据平面向量基本定理得到 $\overrightarrow{FG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{EC}$，结合 $\overrightarrow{DB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{EC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$，从而得到 $\overrightarrow{FG}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$；(2) ① 由题知 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=24$，由 (1) 知 $\overrightarrow{FG}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$，然后根据数量积的运算性质结合条件计算即可；② 由 $\overrightarrow{BG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$，利用向量数量积及运算律计算出 $\overrightarrow{FG}\cdot\overrightarrow{BG}=4$ 和 $|\overrightarrow{BG}|=\sqrt{13}$，再利用向量夹角余弦公式进行计算即可.

【解】(1) 在四边形 $FDBG$ 中，$\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{FD}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BG}$.

在四边形 $FECG$ 中，$\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CG}$.

又因为 F，G 分别是 DE，BC 的中点，所以 $\overrightarrow{FD}=-\overrightarrow{FE}$，$\overrightarrow{BG}=-\overrightarrow{CG}$.

所以 $2\overrightarrow{FG}=(\overrightarrow{FD}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BG})+(\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CG})=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{EC}$，即 $\overrightarrow{FG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{EC}$，

又因为 $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{DB}$，$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{EC}$，所以 $\overrightarrow{DB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{EC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

所以 $\overrightarrow{FG}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.

（2）① 由题知 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=6\times8\times\cos 60^{\circ}=24$.

又由（1）知，$\overrightarrow{FG}=\dfrac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.

因此 $|\overrightarrow{FG}|^{2}=\dfrac{1}{36}\overrightarrow{AB}^{2}+\dfrac{1}{16}\overrightarrow{AC}^{2}+\dfrac{1}{12}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{36}\times6^{2}+\dfrac{1}{16}\times8^{2}+\dfrac{1}{12}\times24=7$.

所以 $|\overrightarrow{FG}|=\sqrt{7}$.

②因为 $\overrightarrow{BG}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

所以 $|\overrightarrow{BG}|=\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)^{2}}=\dfrac{1}{2}\sqrt{\overrightarrow{AC}^{2}+\overrightarrow{AB}^{2}-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}=\dfrac{1}{2}\sqrt{8^{2}+6^{2}-2\times24}=\sqrt{13}$.

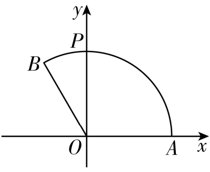
$\overrightarrow{FG}\cdot\overrightarrow{BG}=\left(\dfrac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)$

$=\dfrac{1}{8}\overrightarrow{AC}^{2}-\dfrac{1}{12}\overrightarrow{AB}^{2}-\dfrac{1}{24}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

$=\dfrac{1}{8}\times8^{2}-\dfrac{1}{12}\times6^{2}-\dfrac{1}{24}\times24=4$,

所以 $\cos\angle BGF=\dfrac{\overrightarrow{FG}\cdot\overrightarrow{BG}}{|\overrightarrow{FG}||\overrightarrow{BG}|}=\dfrac{4}{\sqrt{7}\times\sqrt{13}}=\dfrac{4\sqrt{91}}{91}$.

4. B 【解析】如图，以 O 为坐标原点，OA，OP 所在直线分别为 x 轴、y 轴，建立平面直角坐标系，易得 $O(0,0)$，$A(1,0)$，$P(0,1)$. 又扇形 AOB 的半径为 1，$\angle AOB=\dfrac{2\pi}{3}$，所以 $B\left(\cos\dfrac{2\pi}{3},\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$，即 $B\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，所以 $\overrightarrow{OA}=(1,0)$，$\overrightarrow{OP}=(0,1)$，$\overrightarrow{OB}=\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$. 由 $\overrightarrow{OP}=a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}$ 得 $(0,1)=\left(a-\dfrac{1}{2}b,\dfrac{\sqrt{3}}{2}b\right)$，所以 $\begin{cases}a-\dfrac{1}{2}b=0,\\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}b=1,\end{cases}$ 则 $\begin{cases}a=\dfrac{\sqrt{3}}{3},\\ b=\dfrac{2\sqrt{3}}{3},\end{cases}$ 所以 $a+b=\dfrac{\sqrt{3}}{3}+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3}$. **故 B 正确.**



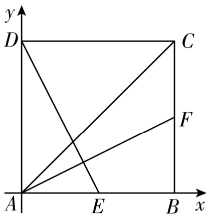
5. 思路导引 (1)建立平面直角坐标系,写出相关点的坐标,利用向量垂直的坐标表示推理得证. (2)利用向量线性运算的坐标表示,结合相等向量列式求解. (3)按点 P 的不同位置设出其坐标,利用数量积的坐标表示列式求出范围.

(1)【证明】以 A 为坐标原点,直线 AB, AD 分别为 x,y 轴,建立平面直角坐标系,

则 $A(0,0)$,$B(a,0)$,$C(a,a)$,$D(0,a)$, $E\left(\frac{a}{2},0\right)$,$F\left(a,\frac{a}{2}\right)$,$a>0$,

$\overrightarrow{DE}=\left(\frac{a}{2},-a\right)$,$\overrightarrow{AF}=\left(a,\frac{a}{2}\right)$,$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{AF}=\frac{a}{2}\cdot a-a\cdot\frac{a}{2}=0$,

所以 $AF\perp DE$.



(2)【解】由(1)知 $\overrightarrow{AC}=(a,a)$,$x\overrightarrow{AF}+y\overrightarrow{DE}=\left(ax+\frac{a}{2}y,\frac{a}{2}x-ay\right)$,

由 $\overrightarrow{AC}=x\overrightarrow{AF}+y\overrightarrow{DE}$,得 $\begin{cases}ax+\frac{a}{2}y=a,\\ \frac{a}{2}x-ay=a,\end{cases}$ 解得 $x=\frac{6}{5}$,$y=-\frac{2}{5}$,

所以 $x+y=\frac{4}{5}$.

(3)【解】由(1)知 $\overrightarrow{AB}=(a,0)$,

当 P 在线段 AD 上时,设 $P(0,t)$,$0\leqslant t\leqslant a$,$\overrightarrow{EP}=\left(-\frac{a}{2},t\right)$,$\overrightarrow{EP}\cdot\overrightarrow{AB}=-\frac{1}{2}a^2$;

当 P 在线段 DC 上时,设 $P(s,a)$,$0\leqslant s\leqslant a$,$\overrightarrow{EP}=\left(s-\frac{a}{2},a\right)$,

$\overrightarrow{EP}\cdot\overrightarrow{AB}=a\left(s-\dfrac{a}{2}\right)\in\left[-\dfrac{1}{2}a^2,\dfrac{1}{2}a^2\right]$;

当 P 在线段 BC 上时,设 $P(a,b)$,$0\leqslant b\leqslant a$,$\overrightarrow{EP}=\left(\dfrac{a}{2},b\right)$,$\overrightarrow{EP}\cdot\overrightarrow{AB}=\dfrac{1}{2}a^2$;

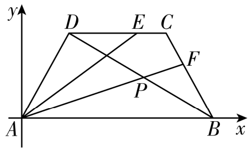
当 P 在线段 AB 上时,设 $P(c,0)$,$0\leqslant c\leqslant a$,$c\neq\dfrac{1}{2}a$,$\overrightarrow{EP}=\left(c-\dfrac{a}{2},0\right)$,

$\overrightarrow{EP}\cdot\overrightarrow{AB}=a\left(c-\dfrac{a}{2}\right)\in\left[-\dfrac{1}{2}a^2,0\right)\cup\left(0,\dfrac{1}{2}a^2\right]$.

所以 $\overrightarrow{EP}\cdot\overrightarrow{AB}$ 的取值范围是 $\left[-\dfrac{1}{2}a^2,\dfrac{1}{2}a^2\right]$.

6. **思路导引** (1)建立平面直角坐标系,结合题意求得 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BC}$ 的坐标,然后求出 $\overrightarrow{BF}=\left(-\dfrac{1}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$,$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}=\left(\dfrac{5}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$,用 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{AD}$ 表示 $\overrightarrow{AF}$,再根据 B,P,D 三点共线,列式算出实数 t 的值;(2)根据平面向量的坐标运算法则求出 $\overrightarrow{AE}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AF}=\left(\dfrac{4}{3}+\lambda,\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)$,然后根据向量模的公式,结合二次函数的性质求出 $\left|\overrightarrow{AE}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AF}\right|$ 的取值范围.

【解】(1)以 A 为坐标原点,AB 所在直线为 x 轴,过点 A 作 AB 的垂线为 y 轴,建立平面直角坐标系,



则 $A(0,0)$,$B(2,0)$,$C\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$,$D\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$,

可得 $\overrightarrow{AB}=(2,0)$,$\overrightarrow{AD}=\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$,$\overrightarrow{BC}=$

$\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，

则 $\overrightarrow{BF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}=\left(-\frac{1}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$，

根据平面向量的加法法则，可得 $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}=\left(\frac{5}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$，

设 $\overrightarrow{AF}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}=\left(2x+\frac{1}{2}y,\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)$，

可得 $\begin{cases}2x+\frac{1}{2}y=\frac{5}{3},\\ \frac{\sqrt{3}}{2}y=\frac{\sqrt{3}}{3},\end{cases}$ 解得 $x=y=\frac{2}{3}$，

所以 $\overrightarrow{AF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$.

因为 $\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AF}=\left(\frac{5}{3}t,\frac{\sqrt{3}}{3}t\right)$，

则根据 B,P,D 三点共线，可知存在实数 m，使 $\overrightarrow{AP}=m\overrightarrow{AB}+(1-m)\overrightarrow{AD}=\left(\frac{3m+1}{2},\frac{\sqrt{3}(1-m)}{2}\right)$，

所以 $\begin{cases}\frac{3m+1}{2}=\frac{5t}{3},\\ \frac{\sqrt{3}(1-m)}{2}=\frac{\sqrt{3}t}{3},\end{cases}$ 解得 $t=\frac{3}{4}$.

(2)因为 $\overrightarrow{AF}=\left(\frac{5}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$，$\overrightarrow{DC}=(1,0)$，所以 $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\lambda(1,0)=\left(\frac{1}{2}+\lambda,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，

可得 $\overrightarrow{AE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AF}=\left(\frac{4}{3}+\lambda,\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$，所以 $\left|\overrightarrow{AE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AF}\right|=\sqrt{\left(\frac{4}{3}+\lambda\right)^2+\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\sqrt{\left(\lambda+\frac{4}{3}\right)^2+\frac{4}{3}}\geqslant\sqrt{\frac{4}{3}}$，

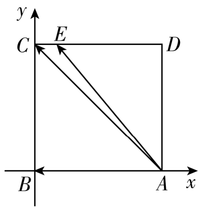
即 $\left|\overrightarrow{AE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AF}\right|\geqslant\frac{2\sqrt{3}}{3}$，当且仅当 $\lambda=-\frac{4}{3}$ 时，等号成立，

所以 $\left|\overrightarrow{AE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AF}\right|$ 的取值范围为 $\left[\frac{2\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$.

7. B

攻略上分 除常规解法外，本题也可利用等和线将代数问题转化为图形问题，确定对应 k 值为 1 的等和线后，结合动点的位置，分析向量系数和的取值范围.

【解析】如图，以 B 为坐标原点，AB，BC 所在直线分别为 x 轴、y 轴，建立平面直角坐标系，



设 $AB=1$，则 $B(0,0)$，$A(1,0)$，$C(0,1)$，

可得 $\overrightarrow{AB}=(-1,0)$，$\overrightarrow{AC}=(-1,1)$，

当点 E 在 BC 上时，设 $E(0,m)$，$m\in[0,1]$，

则 $(-1,m)=\lambda(-1,0)+\mu(-1,1)$，即

$$\begin{cases}-\lambda-\mu=-1,\\ m=\mu,\end{cases}$$ 故 $\lambda+\mu=1$.

当点 E 在 CD 上时，设 $E(t,1)$，$t\in[0,1]$，

则 $(t-1,1)=\lambda(-1,0)+\mu(-1,1)$，即

$$\begin{cases}-\lambda-\mu=t-1,\\ \mu=1,\end{cases}$$ 解得 $$\begin{cases}\lambda=-t,\\ \mu=1,\end{cases}$$

故 $\lambda+\mu=1-t\in[0,1]$.

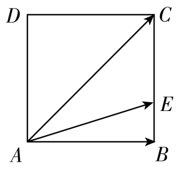
当点 E 在 AD 上时，设 $E(1,u)$，$u\in[0,1]$，

则 $(0,u)=\lambda(-1,0)+\mu(-1,1)$，即

$$\begin{cases}-\lambda-\mu=0,\\ \mu=u,\end{cases}$$ 故 $\lambda+\mu=0$，

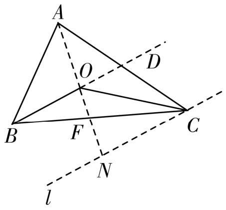
综上，$\lambda+\mu$ 的取值范围是 $[0,1]$. **故 B 正确.**

一题多解 如图所示，当点 E 在 BC 上运动时，由 B,C,E 三点共线可得 $\lambda+\mu=1$，当点 E 在 DA 上运动时，因为 $AD//BC$，此时 $\lambda+\mu=0$，所以根据等和线定理的结论可以快速得到 $\lambda+\mu$ 的取值范围是$[0,1]$. **故 B 正确.**



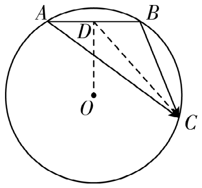
8. B 【解析】因为 O 是$\triangle ABC$ 内一点，$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$，所以 O 为$\triangle ABC$ 的重心，又 M 在$\triangle OBC$ 内(不含边界)，且当 M 与 O 重合时，$\lambda+2\mu$ 最小，此时 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}=\frac{2}{3}\times\left[\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\right]=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，所以 $\lambda=\mu=\frac{1}{3}$，即 $\lambda+2\mu=1$. 当 M 与 C 重合时，$\lambda+2\mu$ 最大，此时 $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AC}$，所以 $\lambda=0,\mu=1$，即 $\lambda+2\mu=2$. 因为 M 在$\triangle OBC$ 内且不含边界，所以取开区间，即 $\lambda+2\mu\in(1,2)$. **故 B 正确.**

一题多解 如图，取 AC 的中点 D，连接 BD 并延长. 因为 O 是$\triangle ABC$ 内一点，$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$，所以 O 为$\triangle ABC$ 的重心，又 M 在$\triangle OBC$ 内(不含边界)，$\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AB}+2\mu\overrightarrow{AD}$，过点 C 作 BD 的平行线 l，连接 AO 并延长交 BC 于点 F，交直线 l 于点 N. 当点 M 在点 O 处时，$\lambda+2\mu=1$；当点 M 在点 C 处时，根据等和线定理，因为 $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AD}$，所以 $\lambda+2\mu=2$，因为 M 在$\triangle OBC$ 内且不含边界，所以取开区间，即 $\lambda+2\mu\in(1,2)$.



9. C　【解析】取 AB 的中点 D，连接 CD，OD，如图所示. 所以 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC})\cdot(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC})=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BD}+(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BD})\cdot\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DC}^2=-1+0+\overrightarrow{DC}^2=\overrightarrow{DC}^2-1$（常规推导）

（**另解**：也可以直接由极化恒等式得 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{DC}^2-1$），因为 $|OD|=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$，所以 $|CD|_{\min}=2-\sqrt{3}$，$|CD|_{\max}=2+\sqrt{3}$，所以 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}$ 的最小值为 $(2-\sqrt{3})^2-1=6-4\sqrt{3}$，最大值为 $(2+\sqrt{3})^2-1=6+4\sqrt{3}$，所以 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}$ 的取值范围是 $[6-4\sqrt{3},6+4\sqrt{3}]$. **故 C 正确.**



10. D

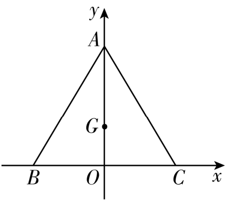
攻略上分　本题所求的两向量 $\overrightarrow{ME}$，$\overrightarrow{MF}$ 共起点，且易知 D 为 EF 中点，故可利用极化恒等式求解.

【解析】连接 MD（图略）. 由题意可得 $BC=2$，M 为 AB 的中点，D 为线段 EF 的中点，由极化恒等式得 $\overrightarrow{ME}\cdot\overrightarrow{MF}=\overrightarrow{MD}^2-\frac{1}{4}\overrightarrow{FE}^2$，又 $MD=\frac{1}{2}BC=1$，$EF=AC=2\sqrt{2}$，则 $\overrightarrow{ME}\cdot\overrightarrow{MF}=1-\frac{1}{4}\times 8=-1$. **故 D 正确.**

一题多解　连接 MD（图略）. 由 D 为线段 EF 的中点，得 $\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}=2\overrightarrow{MD}$，则 $(\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF})^2=\overrightarrow{ME}^2+2\overrightarrow{ME}\cdot\overrightarrow{MF}+\overrightarrow{MF}^2=4\overrightarrow{MD}^2$①，$\overrightarrow{ME}-\overrightarrow{MF}=\overrightarrow{FE}$，$(\overrightarrow{ME}-\overrightarrow{MF})^2=\overrightarrow{FE}^2$②，由①－②可得 $\overrightarrow{ME}\cdot\overrightarrow{MF}=\overrightarrow{MD}^2-\frac{1}{4}\overrightarrow{FE}^2=1-\frac{1}{4}\times 8=-1$.

11. C　【解析】如图所示，以线段 BC 的中点 O 为坐标原点，以线段 BC 所在的直线为 x 轴，线段 BC 的垂直平分线为 y 轴，建立平面直角坐标系. 由 $\triangle ABC$ 的边长为 2，可得 $A(0,\sqrt{3})$，$B(-1,0)$，因为 G 为

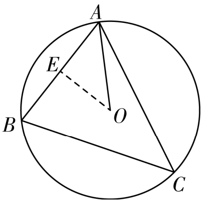
$\triangle ABC$ 的重心，所以 $G\left(0,\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$，所以 $\overrightarrow{AG}=\left(0,-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$，$\overrightarrow{AB}=(-1,-\sqrt{3})$，则 $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{AB}=0\times(-1)+\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\times(-\sqrt{3})=2$. 故 C 正确.



12. A

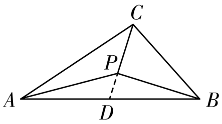
攻略上分 本题为三角形的外心问题，可利用数量积定义求解，也可用大招攻略 7 中的结论直接求解.

【解析】如图，O 为 $\triangle ABC$ 的外心，过点 O 作 $OE\perp AB$ 于点 E，因为 $OE\perp AB$，所以 $|\overrightarrow{AE}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|$，则 $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AO}|\cdot|\overrightarrow{AB}|\cdot\cos\angle BAO=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AE}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|^2=\frac{1}{2}\times 4^2=8$ $\left(\right.$**另解**：可由投影向量的定义求得或者由 O 为 $\triangle ABC$ 的外心直接得到 $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2=8\left.\right)$. 故 A 正确.



13. ABD 【解析】对于 A，取 AB 的中点 D，连接 PD，则 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=2\overrightarrow{PD}$，若 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\mathbf{0}$，则 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=-\overrightarrow{PC}$，即 $2\overrightarrow{PD}=-\overrightarrow{PC}$，所以 $|\overrightarrow{CP}|=2|\overrightarrow{PD}|$，又 PD 与 PC 有公共点 P，故 P 为中线 CD 上靠近点 D 的三等分点，

同理可得，P 也是边 AC 和边 BC 上的中线的三等分点，所以 P 为 $\triangle ABC$ 的重心，故 A 正确；



对于 B，若 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}$，则 $(\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PC})\cdot\overrightarrow{PB}=0$，即 $\overrightarrow{CA}\perp\overrightarrow{PB}$，同理可得，$\overrightarrow{BA}\perp\overrightarrow{PC}$，$\overrightarrow{BC}\perp\overrightarrow{PA}$，故 P 是 $\triangle ABC$ 的垂心，**故 B 正确；**

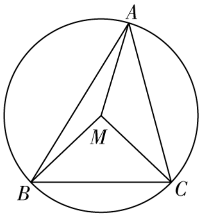
对于 C，由 $\overrightarrow{AP}=\lambda\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\right)$，$\lambda\in[0,+\infty)$，知点 P 在 $\angle BAC$ 的平分线上，但不一定在 $\angle ABC$ 或 $\angle ACB$ 的平分线上，**故 C 错误；**

对于 D，因为 $(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB})\cdot\overrightarrow{BA}=0$，所以 $(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB})\cdot(\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PB})=0$，所以 $|\overrightarrow{PA}|^2-|\overrightarrow{PB}|^2=0$，即 $|\overrightarrow{PA}|=|\overrightarrow{PB}|$，同理可得，$|\overrightarrow{PB}|=|\overrightarrow{PC}|$，$|\overrightarrow{PA}|=|\overrightarrow{PC}|$，所以 P 为 $\triangle ABC$ 的外心，**故 D 正确.**

14. ABD 【解析】对于 A，因为 $S_A:S_B:S_C=1:1:1$，所以 $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\mathbf{0}$，由“奔驰定理”与三角形四心的性质，可知 M 为 $\triangle ABC$ 的重心，**故 A 正确.**

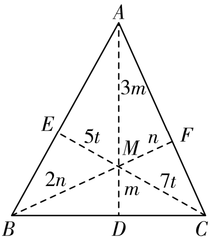
对于 B，若 M 为 $\triangle ABC$ 的内心，可设其内切圆半径为 r，则 $S_A=\frac{1}{2}BC\cdot r$，$S_B=\frac{1}{2}AC\cdot r$，$S_C=\frac{1}{2}AB\cdot r$，所以 $\frac{1}{2}BC\cdot r\cdot\overrightarrow{MA}+\frac{1}{2}AC\cdot r\cdot\overrightarrow{MB}+\frac{1}{2}AB\cdot r\cdot\overrightarrow{MC}=\mathbf{0}$，即 $BC\cdot\overrightarrow{MA}+AC\cdot\overrightarrow{MB}+AB\cdot\overrightarrow{MC}=\mathbf{0}$，**故 B 正确.**

对于 C，若 $\angle BAC=45°$，$\angle ABC=60°$，M 为 $\triangle ABC$ 的外心，则 $\angle ACB=75°$，如图①，设 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 R，故 $\angle BMC=2\angle BAC=90°$，$\angle AMC=2\angle ABC=120°$，$\angle AMB=2\angle ACB=150°$，故 $S_A=\frac{1}{2}R^2$，$S_B=R\sin 30°\cdot 2R\cos 30°\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}R^2$，$S_C=R\sin 15°\cdot 2R\cos 15°\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\sin 30°R^2=\frac{1}{4}R^2$，所以 $S_A:S_B:S_C=2:\sqrt{3}:1$，**故 C 错误.**



图①

对于 D，若 M 为 $\triangle ABC$ 的垂心，$3\overrightarrow{MA}+4\overrightarrow{MB}+5\overrightarrow{MC}=\mathbf{0}$，则 $S_A:S_B:S_C=3:4:5$，如图②，分别过 A,C,B 作 $AD\perp BC$，$CE\perp AB$，$BF\perp AC$，垂足分别为 D,E,F，AD，CE，BF 相交于点 M，



图②

又 $S_{\triangle ABC}=S_A+S_B+S_C$，$\dfrac{S_A}{S_{\triangle ABC}}=\dfrac{3}{12}=\dfrac{1}{4}$，即 $AM:MD=3:1$，$\dfrac{S_B}{S_{\triangle ABC}}=\dfrac{4}{12}=\dfrac{1}{3}$，即 $MF:BM=1:2$，$\dfrac{S_C}{S_{\triangle ABC}}=\dfrac{5}{12}$，即 $ME:MC=5:7$，设 $MD=m$，$MF=n$，$ME=5t$，则 $AM=3m$，$BM=2n$，$MC=7t$，因为 $\angle CAD=\angle CBF$，$\sin\angle CAD=\dfrac{n}{3m}$，$\sin\angle CBF=\dfrac{m}{2n}$，所以 $\dfrac{n}{3m}=\dfrac{m}{2n}$，即 $m=\dfrac{\sqrt{6}}{3}n$，$\cos\angle BMD=\dfrac{m}{2n}=\dfrac{\frac{\sqrt{6}}{3}n}{2n}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$，则 $\cos\angle AMB=\cos(\pi-\angle BMD)=-\dfrac{\sqrt{6}}{6}$，故 D 正确.

专题上分 2 向量最值（取值范围）问题

1. D 【解析】设 $\boldsymbol{y}=(m,n)$.

因为 $\boldsymbol{x}=(2,0)$，$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=2$，所以 $2m=2$，解得 $m=1$，

则 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z}=(2,0)+(1,n)-(0,1)=(3,n-1)$，则 $|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z}|=\sqrt{9+(n-1)^2}$，

当 $n=1$ 时，$|x+y-z|$ 取得最小值 3. **故选 D.**

2. D　【解析】由题可知 $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{e}=|\boldsymbol{b}||\boldsymbol{e}|\cdot\cos 60°=\dfrac{1}{2}|\boldsymbol{b}|$.

由 $|\boldsymbol{b}-t\boldsymbol{e}|\geqslant|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{e}|$，两边同时平方得 $|\boldsymbol{b}|^2+t^2|\boldsymbol{e}|^2-2t\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{e}\geqslant|\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{e}|^2-2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{e}$，化简整理得 $t^2-|\boldsymbol{b}|t-(1-|\boldsymbol{b}|)\geqslant0$.

因为 $|\boldsymbol{b}-t\boldsymbol{e}|\geqslant|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{e}|$ 对任意实数 t 恒成立，所以 $t^2-|\boldsymbol{b}|t-(1-|\boldsymbol{b}|)\geqslant0$ 对任意实数 t 恒成立，

所以 $\Delta=|\boldsymbol{b}|^2+4(1-|\boldsymbol{b}|)=(|\boldsymbol{b}|-2)^2\leqslant0$，所以 $|\boldsymbol{b}|=2$.

所以 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{e}|+|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\geqslant|(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{e})-(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})|=|\boldsymbol{b}+\boldsymbol{e}|=\sqrt{|\boldsymbol{b}+\boldsymbol{e}|^2}=\sqrt{|\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{e}|^2+2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{e}}=\sqrt{4+1+2}=\sqrt{7}$，

当且仅当向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{e}$ 与 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 方向相反时等号成立，所以 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{e}|+|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$ 的最小值为 $\sqrt{7}$. **故选 D.**

3. C

攻略上分　数量积的最值问题，可用通法攻略 9.

【解析】由题意得 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|=1$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1\times1\times\cos 60°=\dfrac{1}{2}$，

则 $(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{c}-2\boldsymbol{b})=\boldsymbol{c}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})=2-\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})$.

因为 $\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{c}|\cdot|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|\cdot\cos\langle\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}\rangle=|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|\cdot\cos\langle\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}\rangle\geqslant-|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|$，

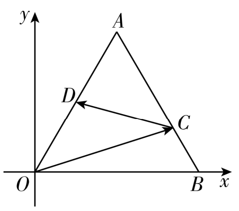
提示：$-1\leqslant\cos\langle\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}\rangle\leqslant1$

当且仅当 $\langle\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}\rangle=\pi$ 时取等号，

又 $|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|^2=(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2+4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{b}^2=1+4\times\dfrac{1}{2}+4=7$，所以 $|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|=\sqrt{7}$，

所以 $(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{c}-2\boldsymbol{b})\leqslant2+\sqrt{7}$. **故选 C.**

4. A　【解析】如图.



设 $\overrightarrow{BC}=\lambda\overrightarrow{BA}(0\leqslant\lambda\leqslant1)$,

则 $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OB}+\lambda\overrightarrow{BA}=(1,0)+\lambda\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\left(1-\frac{\lambda}{2},\frac{\sqrt{3}\lambda}{2}\right)$,

又 $\overrightarrow{OD}=\left(\frac{1}{4},\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$,

所以 $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}=\left(\frac{1}{4},\frac{\sqrt{3}}{4}\right)-\left(1-\frac{\lambda}{2},\frac{\sqrt{3}\lambda}{2}\right)=\left(-\frac{3}{4}+\frac{\lambda}{2},\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\sqrt{3}\lambda}{2}\right)$.

所以 $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{CD}=\left(1-\frac{\lambda}{2},\frac{\sqrt{3}\lambda}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{4}+\frac{\lambda}{2},\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\sqrt{3}\lambda}{2}\right)=-\lambda^2+\frac{5}{4}\lambda-\frac{3}{4}=-\left(\lambda-\frac{5}{8}\right)^2-\frac{23}{64}(0\leqslant\lambda\leqslant1)$.

所以当 $\lambda=0$ 时,$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{CD}$ 取得最小值,为 $-\frac{3}{4}$;

当 $\lambda=\frac{5}{8}$ 时,$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{CD}$ 取得最大值,为 $-\frac{23}{64}$.

所以 $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{CD}\in\left[-\frac{3}{4},-\frac{23}{64}\right]$. **故选 A.**

5. D

思路导引 由题意可知,$AB=AC$,取 BC 的中点 E,连接 AE,DE,则 $AE\perp BC$,$BC=2\sqrt{2}$,$AE=3\sqrt{2}$,$BE=\sqrt{2}$,由极化恒等式得到 $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DE}^2-2$,求出 DE 的最小值,得到答案.

【解析】因为 $\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$,$\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$ 分别表示 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 方向上的单位向量,

所以 $\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$ 表示 $\angle BAC$ 的平分线上的向量,

又 $\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\right)\cdot\overrightarrow{BC}=0$,即 $\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 垂直,

由三线合一可知,$AB=AC$.

如图，取 BC 的中点 E，连接 AE,DE，则 $AE\perp BC$，

又 $|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}|=2\sqrt{2}$，$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|=6\sqrt{2}$，其中 $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$，$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AE}$，

所以 $BC=2\sqrt{2}$，$AE=3\sqrt{2}$，故 $BE=\sqrt{2}$，

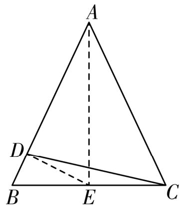
由于 $\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{DE}$，$\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{EB}$，由极化恒等式可得 $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DE}^2-\overrightarrow{EB}^2=\overrightarrow{DE}^2-2$，

当 $ED\perp AB$ 时，ED 取得最小值，

由勾股定理得 $AB=\sqrt{AE^2+BE^2}=\sqrt{18+2}=2\sqrt{5}$，

故 $DE=\dfrac{AE\cdot BE}{AB}=\dfrac{3\sqrt{2}\times\sqrt{2}}{2\sqrt{5}}=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$，

故 $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}$ 的最小值为 $\left(\dfrac{3\sqrt{5}}{5}\right)^2-2=-\dfrac{1}{5}$.



6. C

思路导引 设 $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{c}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$，$3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}=(1,0)$，表示出 $\boldsymbol{a}-6\boldsymbol{b}$ 的坐标，利用平面向量夹角的坐标运算以及基本不等式可求得 $\cos\langle\boldsymbol{a}-6\boldsymbol{b},3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}\rangle$ 的最值.

【解析】因为 $|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{c}|=|3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}|=1$，不妨设 $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{c}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$，$3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}=(1,0)$，

则 $\boldsymbol{a}-6\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{c})-2(3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=(\cos\alpha-2,\sin\alpha)$，

所以 $\cos\langle\boldsymbol{a}-6\boldsymbol{b},3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}\rangle=\dfrac{(\boldsymbol{a}-6\boldsymbol{b})\cdot(3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})}{|\boldsymbol{a}-6\boldsymbol{b}|\cdot|3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}|}$

$$=\frac{\cos\alpha-2}{\sqrt{(\cos\alpha-2)^2+\sin^2\alpha}}$$

$$=-\frac{1}{4}\cdot\frac{8-4\cos\alpha}{\sqrt{5-4\cos\alpha}}$$

$$=-\frac{1}{4}\sqrt{\frac{(8-4\cos\alpha)^2}{5-4\cos\alpha}}$$

$$=-\frac{1}{4}\sqrt{\frac{(3+5-4\cos\alpha)^2}{5-4\cos\alpha}}$$

$$=-\frac{1}{4}\sqrt{\frac{9}{5-4\cos\alpha}+(5-4\cos\alpha)+6}$$

$\leqslant-\frac{1}{4}\sqrt{2\sqrt{\frac{9(5-4\cos\alpha)}{5-4\cos\alpha}}+6}$

$=-\frac{\sqrt{12}}{4}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$,

当且仅当$\frac{9}{5-4\cos\alpha}=5-4\cos\alpha$,即 $\cos\alpha=2$(舍)或 $\cos\alpha=\frac{1}{2}$时,等号成立,

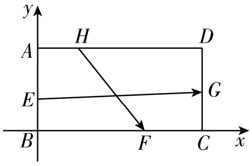
故 $\cos\langle \boldsymbol{a}-6\boldsymbol{b},3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}\rangle$ 有最大值$-\frac{\sqrt{3}}{2}$. **故选 C.**

7. $\frac{8}{17}$

思路导引 建立平面直角坐标系 Bxy,设 $E(0,e)$,$F(f,0)$,$G(4,g)$,$H(h,2)$,$e,g\in[0,2]$,$f,h\in[0,4]$,令 $\alpha=g-e\in[-2,2]$,$\beta=f-h\in[-4,4]$,则 $\overrightarrow{EG}=(4,\alpha)$,$\overrightarrow{HF}=(\beta,-2)$,应用向量夹角的坐标表示求最大值.

【解析】建立平面直角坐标系 Bxy,如图.

设 $E(0,e)$,$F(f,0)$,$G(4,g)$,$H(h,2)$,$e,g\in[0,2]$,$f,h\in[0,4]$,



所以 $\overrightarrow{EG}=(4,g-e)$,$\overrightarrow{HF}=(f-h,-2)$,

$-2\leqslant g-e\leqslant2$,$-4\leqslant f-h\leqslant4$,

令 $\alpha=g-e\in[-2,2]$,$\beta=f-h\in[-4,4]$,

则 $\overrightarrow{EG}=(4,\alpha)$,$\overrightarrow{HF}=(\beta,-2)$,

所以$|\overrightarrow{EG}|=\sqrt{16+\alpha^2}$,$|\overrightarrow{HF}|=\sqrt{\beta^2+4}$,且 $\overrightarrow{EG}\cdot\overrightarrow{HF}=4\beta-2\alpha=4$,即 $\alpha=2\beta-2$,

所以$-2\leqslant2\beta-2\leqslant2$,故 $\beta\in[0,2]$.

由题设 $\cos\theta=\frac{\overrightarrow{EG}\cdot\overrightarrow{HF}}{|\overrightarrow{EG}||\overrightarrow{HF}|}$

$=\frac{4}{\sqrt{\alpha^2+16}\times\sqrt{\beta^2+4}}$

$=\frac{4}{\sqrt{(\alpha\beta)^2+4\alpha^2+16\beta^2+64}}$

$=\frac{4}{\sqrt{(\alpha\beta)^2+4(2\beta-\alpha)^2+16\alpha\beta+64}}$

$=\frac{4}{\sqrt{(\alpha\beta)^2+16\alpha\beta+80}}=\frac{4}{\sqrt{(\alpha\beta+8)^2+16}}$,

又 $\alpha\beta=2\beta(\beta-1)=2\left(\beta-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\in$

$\left[-\frac{1}{2},4\right]$,

所以当 $\alpha\beta=-\frac{1}{2}$ 时, $\cos\theta$ 取最大值 $\frac{4}{\sqrt{\frac{1}{4}-8+80}}=\frac{8}{17}$.

8. D 【解析】由点 D 在线段 BC 上, $|\overrightarrow{BD}|=\frac{1}{3}|\overrightarrow{DC}|$, 得 $\overrightarrow{BE}=x\overrightarrow{BA}+y\overrightarrow{BC}=x\overrightarrow{BA}+4y\overrightarrow{BD}$,

而 E 为线段 AD 上除端点外的任意一点,

则 $x+4y=1$, 且 $x>0,y>0$,

所以 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)(x+4y)=5+\frac{4y}{x}+\frac{x}{y}\geqslant 5+2\sqrt{\frac{4y}{x}\cdot\frac{x}{y}}=9$, 当且仅当 $\frac{4y}{x}=\frac{x}{y}$, 即 $x=\frac{1}{3},y=\frac{1}{6}$ 时取等号, 所以 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ 的最小值为 9. **故选** D.

9. C

思路导引 利用平面向量基本定理推导出 $m+2n=6$, 即 $\frac{m}{2}+\left(\frac{m}{2}+2n\right)=6$, 将代数式 $\frac{2}{m}+\frac{9}{\frac{m}{2}+2n}$ 与 $\frac{1}{6}\left[\frac{m}{2}+\left(\frac{m}{2}+2n\right)\right]$ 相乘, 展开后利用基本不等式可求得 $\frac{2}{m}+\frac{9}{\frac{m}{2}+2n}$ 的最小值.

【解析】因为 $\overrightarrow{BO}=2\overrightarrow{OC}$, 则 $\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{AB}=2(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AO})$, 所以 $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$,

因为 G 为 AO 的中点, 所以 $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AO}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$,

因为 D,G,E 三点共线, 设 $\overrightarrow{DG}=\lambda\overrightarrow{DE}(\lambda>0)$, 则 $\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{AD}=\lambda(\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD})$,

所以 $\overrightarrow{AG}=(1-\lambda)\overrightarrow{AD}+\lambda\overrightarrow{AE}$,

因为 $\overrightarrow{AB}=m\overrightarrow{AD}(m>0)$, $\overrightarrow{AC}=n\overrightarrow{AE}(n>0)$,

所以 $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{m}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{n}\overrightarrow{AC}$,

则 $\overrightarrow{AG}=\frac{1-\lambda}{m}\overrightarrow{AB}+\frac{\lambda}{n}\overrightarrow{AC}$.

因为 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ 不共线,

所以 $\begin{cases}\dfrac{1-\lambda}{m}=\dfrac{1}{6},\\ \dfrac{\lambda}{n}=\dfrac{1}{3},\end{cases}$

提示：平面内的向量可以用同一个基底唯一表示

所以 $\dfrac{m}{6}+\dfrac{n}{3}=(1-\lambda)+\lambda=1$,

所以 $m+2n=6$,即 $\dfrac{m}{2}+\left(\dfrac{m}{2}+2n\right)=6$,

所以 $\dfrac{2}{m}+\dfrac{9}{\frac{m}{2}+2n}=\dfrac{1}{\frac{m}{2}}+\dfrac{9}{\frac{m}{2}+2n}$

$=\dfrac{1}{6}\left[\dfrac{m}{2}+\left(\dfrac{m}{2}+2n\right)\right]\left(\dfrac{1}{\frac{m}{2}}+\dfrac{9}{\frac{m}{2}+2n}\right)$

$=\dfrac{1}{6}\left(10+\dfrac{\frac{m}{2}+2n}{\frac{m}{2}}+\dfrac{\frac{9m}{2}}{\frac{m}{2}+2n}\right)$

$\geqslant\dfrac{1}{6}\left(10+2\sqrt{\dfrac{\frac{m}{2}+2n}{\frac{m}{2}}\cdot\dfrac{\frac{9m}{2}}{\frac{m}{2}+2n}}\right)=\dfrac{8}{3}$,

当且仅当 $\begin{cases}\dfrac{\frac{m}{2}+2n}{\frac{m}{2}}=\dfrac{\frac{9m}{2}}{\frac{m}{2}+2n},\\ \dfrac{m}{2}+\left(\dfrac{m}{2}+2n\right)=6,\\ m>0,n>0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}m=3,\\ n=\dfrac{3}{2}\end{cases}$ 时,等号成立,

所以 $\dfrac{2}{m}+\dfrac{9}{\frac{m}{2}+2n}$ 的最小值为 $\dfrac{8}{3}$. **故选 C.**

6.4 平面向量的应用

6.4.1 平面几何中的向量方法+

6.4.2 向量在物理中的应用举例

对点上分

1. C 【解析】$\because\ \overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{MN}=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN})\cdot(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CN})=\left(\overrightarrow{AD}+\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD}-\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}\right)=\dfrac{1}{3}|\overrightarrow{AD}|^2-\dfrac{3}{16}|\overrightarrow{AB}|^2=\dfrac{1}{3}\times$

$9-\frac{3}{16}\times16=0$，∴ $AN\perp MN$，∴ $\triangle AMN$ 是直角三角形. **故 C 正确.**

2. $\sqrt{3}$　$90°$　【解析】设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$，

则 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}=\frac{2}{3}\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}$，

∴ $|\overrightarrow{AD}|^2=\left(\frac{2}{3}\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}\right)^2=\frac{4}{9}\boldsymbol{a}^2+2\times\frac{2}{9}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\frac{1}{9}\boldsymbol{b}^2=\frac{4}{9}\times9+2\times\frac{2}{9}\times3\times3\times\cos120°+\frac{1}{9}\times9=3$，∴ $AD=\sqrt{3}$.

设 $\angle DAC=\theta$，则向量 $\overrightarrow{AD}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 的夹角为 θ.

∵ $\cos\theta=\frac{\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AD}||\overrightarrow{AC}|}$

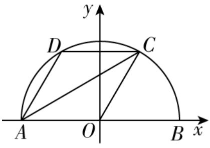
$=\frac{\left(\frac{2}{3}\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}\right)\cdot\boldsymbol{b}}{\sqrt{3}\times3}$

$=\frac{\frac{1}{3}\boldsymbol{b}^2+\frac{2}{3}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{3\sqrt{3}}$

$=\frac{\frac{1}{3}\times9+\frac{2}{3}\times3\times3\times\cos120°}{3\sqrt{3}}=0$，

∴ $\theta=90°$，即 $\angle DAC=90°$.

3. (1)【**证明**】以 O 为坐标原点，建立如图所示的平面直角坐标系.



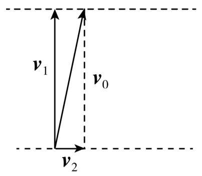
由题意可知 $OB=1$，$\angle COB=\frac{\pi}{3}$，$O(0,0)$，$A(-1,0)$，$C\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$D\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，则 $\overrightarrow{AD}=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\overrightarrow{OC}=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. 因为 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OC}$，且 A,D,C 三点不共线，所以 $AD//OC$ 且 $AD=OC$.

(2)【**解**】设点 C 在第一象限，$\angle COB=\alpha$，$\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，则 $C(\cos\alpha,\sin\alpha)$，$D(-\cos\alpha,\sin\alpha)$，$|\overrightarrow{CD}|=2\cos\alpha$，$\triangle ACD$

的边 DC 上的高为 $\sin\alpha$，所以 $\triangle ACD$ 的面积为 $\frac{1}{2}\times 2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{2}\sin 2\alpha$，当 $\alpha=\frac{\pi}{4}$ 时，$\triangle ACD$ 的面积取得最大值，且最大值为 $\frac{1}{2}$.

4. C 【解析】由题意，物体从点 $A(-1,3)$ 处移动到点 $B(2,6)$ 处，可得 $\overrightarrow{AB}=(3,3)$，因为力 $\boldsymbol{F}=(5,2)$，所以力 $\boldsymbol{F}$ 对物体所做的功为 $\boldsymbol{F}\cdot\overrightarrow{AB}=5\times3+2\times3=21$. **故 C 正确.**

5. B 【解析】根据题意作出图形，如图，记 $\boldsymbol{v}_2$ 表示水流速度，$\boldsymbol{v}_1$ 表示船在静水中的速度，$\boldsymbol{v}_0$ 表示船实际航行的速度. 由题意知 $|\boldsymbol{v}_2|=2$ m/s，$|\boldsymbol{v}_1|=10$ m/s，$\boldsymbol{v}_1\perp\boldsymbol{v}_2$，由 $\boldsymbol{v}_0=\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2$ 可得 $|\boldsymbol{v}_0|=2\sqrt{26}$ m/s. **故 B 正确.**



6. C 【解析】根据题意知 $\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2=\boldsymbol{G}$，$|\boldsymbol{F}_1|=|\boldsymbol{F}_2|$，

则 $|\boldsymbol{F}_1|=|\boldsymbol{F}_2|=\dfrac{|\boldsymbol{G}|}{2\cos\dfrac{\theta}{2}}$，$\theta\in[0,\pi)$.

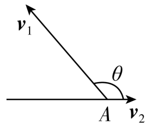
对于 A，由于 $|\boldsymbol{G}|$ 不变，则 θ 越小越省力，θ 越大越费力，**故 A 错误；**

对于 B，由于 $|\boldsymbol{F}_1|=|\boldsymbol{F}_2|=\dfrac{|\boldsymbol{G}|}{2\cos\dfrac{\theta}{2}}$，**故 B 错误；**

对于 C，当 $\theta=\frac{2\pi}{3}$ 时，$|\boldsymbol{F}_1|=|\boldsymbol{F}_2|=\dfrac{|\boldsymbol{G}|}{2\cos\dfrac{\pi}{3}}=|\boldsymbol{G}|$，**故 C 正确；**

对于 D，当 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时，$|\boldsymbol{F}_1|=|\boldsymbol{F}_2|=\dfrac{|\boldsymbol{G}|}{2\cos\dfrac{\pi}{4}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}|\boldsymbol{G}|$，**故 D 错误.**

7. AB 【解析】对于 A，如图①，设 $\boldsymbol{v}_1$ 与 $\boldsymbol{v}_2$ 的夹角为 θ，船行驶的时间为 t，$d=500$ m $=0.5$ km.

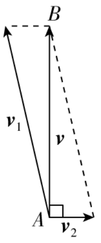


图①

当 θ 为钝角时，$t_1=\frac{d}{\sin(\pi-\theta)|\boldsymbol{v}_1|}=\frac{0.5}{10\sin\theta}=\frac{0.05}{\sin\theta}$(h)；当 θ 为锐角时，$t_2=\frac{d}{\sin\theta|\boldsymbol{v}_1|}=\frac{0.5}{10\sin\theta}=\frac{0.05}{\sin\theta}$(h)；当 θ 为直角时，$t_3=\frac{d}{|\boldsymbol{v}_1|}=\frac{0.5}{10}=0.05$(h). 则当 θ 为钝角时，$0<\sin\theta<1$，$t_1>0.05\ \text{h}=t_3$；当 θ 为锐角时，$0<\sin\theta<1$，$t_2>0.05\ \text{h}=t_3$. 所以当船垂直于河岸行驶，即 $\boldsymbol{v}_1\perp\boldsymbol{v}_2$ 时，所用时间最短，**故 A 正确**.

对于 B 和 C，由 A 可知，这艘船到达河对岸的渡河时间最短为 $t_3=0.05\ \text{h}=0.05\times60=3$(min)，**故 B 正确，C 错误**.

对于 D，如图②，设点 B 是河对岸一点，AB 与河岸垂直，那么当这艘船实际沿着 AB 方向行驶时，船的航程最短，由图②可知，设 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2$，则 $|\boldsymbol{v}|=\sqrt{|\boldsymbol{v}_1|^2-|\boldsymbol{v}_2|^2}=4\sqrt{6}$(km/h)，此时，船的航行时间 $t=\frac{d}{|\boldsymbol{v}|}=\frac{0.5}{4\sqrt{6}}\times60=\frac{30}{4\sqrt{6}}\approx3.1(min)>3$(min)，**故 D 错误**.



图②

能力上分

1. ACD 【解析】设空速向量为 $\boldsymbol{a}$，风速向量为 $\boldsymbol{b}$，地速向量为 $\boldsymbol{c}$，则 $\boldsymbol{a}=(3,4)$，$\boldsymbol{b}=(1,-1)$，

所以 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(3,4)+(1,-1)=(4,3)$，

所以 $|\boldsymbol{c}|=\sqrt{4^2+3^2}=5$，

所以地速大小为 5 m/s，**故 A 正确**；

由 $\boldsymbol{a}=(3,4)$，$\boldsymbol{c}=(4,3)$ 可知地速向量的方向与空速向量的方向不相同，**故 B**

错误；

由于纵向偏移量为 4 m/s，与标准值无偏差，**故 C 正确**；

由于无人机计划沿 x 轴正方向为线路巡检，而地速向量为 $\boldsymbol{c}=(4,3)$，

所以需要调整飞行姿态，**故 D 正确. 故选 ACD.**

2. D 【解析】在△ABC 中，点 D 在 BC 边上且 $BD=\frac{1}{3}BC$，则 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

又 $|\overrightarrow{AB}|=1$，$|\overrightarrow{AC}|=2$，$\angle BAC=60°$，

则 $|\overrightarrow{AD}|=\sqrt{\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{9}|\overrightarrow{AC}|^2+\frac{4}{9}|\overrightarrow{AB}|^2+\frac{4}{9}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}}=\sqrt{\frac{1}{9}\times4+\frac{4}{9}\times1+\frac{4}{9}\times1\times2\times\frac{1}{2}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，即 AD 的长度为$\frac{2\sqrt{3}}{3}$，**故 D 正确.**

3. B

思路导引 利用平面向量基本定理得到 $\overrightarrow{AP}=\frac{2m}{3}\overrightarrow{AM}+\frac{n}{3}\overrightarrow{AN}$，由共线定理的推论得到$\frac{2m}{3}+\frac{n}{3}=1$，然后根据“1”的代换，结合基本不等式求解最小值即可.

【解析】连接 AP（图略），$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，

因为 $AB=mAM$，$AC=nAN$，所以 $\overrightarrow{AP}=\frac{2m}{3}\overrightarrow{AM}+\frac{n}{3}\overrightarrow{AN}$，

又 M,P,N 三点共线，所以$\frac{2m}{3}+\frac{n}{3}=1$.

由于 $m>0,n>0$，

所以$\frac{1}{m}+\frac{2}{n}=\left(\frac{1}{m}+\frac{2}{n}\right)\left(\frac{2m}{3}+\frac{n}{3}\right)=\frac{4}{3}+\frac{n}{3m}+\frac{4m}{3n}\geqslant\frac{4}{3}+2\sqrt{\frac{n}{3m}\cdot\frac{4m}{3n}}=\frac{8}{3}$，

当且仅当$\frac{n}{3m}=\frac{4m}{3n}$，即 $m=\frac{3}{4}$，$n=\frac{3}{2}$时等

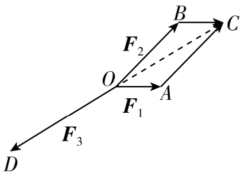
号成立.

故$\frac{1}{m}+\frac{2}{n}$的最小值为$\frac{8}{3}$. **故选 B.**

4. $\frac{5\pi}{6}$

思路导引 作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{F}_1$, $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{F}_2$, $\overrightarrow{OD}=\boldsymbol{F}_3$, 以 OA, OB 为邻边作平行四边形 $OACB$, 连接 OC, 则 $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2=-\boldsymbol{F}_3$, 利用平面向量数量积的运算性质求出 $\angle AOC$, 可得出 $\angle AOD$ 的大小, 由此可得出 $\boldsymbol{F}_3$ 与 $\boldsymbol{F}_1$ 夹角的大小.

【解析】作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{F}_1$, $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{F}_2$, $\overrightarrow{OD}=\boldsymbol{F}_3$, 以 OA, OB 为邻边作平行四边形 $OACB$, 连接 OC, 则 $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2=-\boldsymbol{F}_3$,



由题意可得 $|\overrightarrow{OA}|=1$, $|\overrightarrow{OB}|=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$,

$\angle AOB=\frac{\pi}{4}$,

则 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OB}|\cos\frac{\pi}{4}=1\times\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$,

$|\overrightarrow{OC}|=\sqrt{(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})^2}$

$=\sqrt{\overrightarrow{OA}^2+2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB}^2}$

$=\sqrt{1+(\sqrt{3}+1)+(\sqrt{3}+2)}$

$=\sqrt{4+2\sqrt{3}}=\sqrt{3}+1$,

则 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})=\overrightarrow{OA}^2+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=1+\frac{\sqrt{3}+1}{2}=\frac{3+\sqrt{3}}{2}$,

所以 $\cos\angle AOC=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}}{|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OC}|}=\frac{\frac{3+\sqrt{3}}{2}}{1\times(\sqrt{3}+1)}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

因为 $0<\angle AOC<\pi$, 所以 $\angle AOC=\frac{\pi}{6}$, 则

$\angle AOD=\dfrac{5\pi}{6}$,

即 F_3 与 F_1 夹角的大小为$\dfrac{5\pi}{6}$.

5. (1)【解】$\because$ E 是 AB 的中点,$\overrightarrow{AF}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BG}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{BC}$, $\therefore$ $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AE}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AD}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\dfrac{2}{3}\boldsymbol{b}-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BG}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{BC}=\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}+\dfrac{2}{3}\boldsymbol{b}$.

(2)【证明】$\because$ $|\boldsymbol{a}|=\dfrac{4}{3}|\boldsymbol{b}|$, $\therefore$ $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{EG}=\left(\dfrac{2}{3}\boldsymbol{b}-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}+\dfrac{2}{3}\boldsymbol{b}\right)=\dfrac{1}{3}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\dfrac{4}{9}|\boldsymbol{b}|^2-\dfrac{1}{4}|\boldsymbol{a}|^2-\dfrac{1}{3}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\dfrac{4}{9}|\boldsymbol{b}|^2-\dfrac{1}{4}\times\dfrac{16}{9}|\boldsymbol{b}|^2=0$, $\therefore$ $\overrightarrow{EF}\perp\overrightarrow{EG}$, 则 $EF\perp EG$.

方法总结 对于利用向量解决线段垂直的问题,可以联想到两个向量垂直的条件(向量的数量积为 0),而对于这一条件的应用,既可以考虑向量关系式的形式,也可以考虑坐标的形式.

6. (1)【证明】$\because$ $\overrightarrow{BP}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}$, $\therefore$ $\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, 即 $\overrightarrow{AP}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$. 又 O 为线段 AP 的中点, $\therefore$ $\overrightarrow{AO}=\dfrac{1}{6}\overrightarrow{AC}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$. 又 $\overrightarrow{AQ}=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{AB}$, $\therefore$ $\overrightarrow{AB}=\dfrac{5}{2}\overrightarrow{AQ}$, $\therefore$ $\overrightarrow{AO}=\dfrac{1}{6}\overrightarrow{AC}+\dfrac{5}{6}\overrightarrow{AQ}$, 且 $\dfrac{1}{6}+\dfrac{5}{6}=1$, $\therefore$ C,O,Q 三点共线.

(2)【解】由(1)可得 $\overrightarrow{AP}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$, 又 $\overrightarrow{CQ}=\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AC}$, 设 $\overrightarrow{AQ}=t\overrightarrow{AB}$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$, 则 $\overrightarrow{CQ}=t\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$, 由 $\overrightarrow{AP}\perp\overrightarrow{CQ}$ 可得 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{CQ}=0$, 即 $\left(\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}\right)\cdot(t\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})=0$, $\therefore$ $\dfrac{t}{3}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}-\dfrac{1}{3}|\overrightarrow{AC}|^2+\dfrac{2}{3}t|\overrightarrow{AB}|^2-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=0$, 即 $\dfrac{t-2}{3}\times$

$6\cos\angle BAC-3+\frac{8}{3}t=0$,整理得 $\cos\angle BAC=\frac{3-\frac{8}{3}t}{2(t-2)}=\frac{-\frac{8}{3}(t-2)-\frac{7}{3}}{2(t-2)}=-\frac{4}{3}-\frac{7}{6(t-2)}$,

故 $\cos\angle BAC\in\left[-\frac{3}{4},-\frac{1}{6}\right]$.

$\therefore\cos\angle BAC$ 的取值范围为 $\left[-\frac{3}{4},-\frac{1}{6}\right]$.

6.4.3 余弦定理、正弦定理

课时 1 余弦定理

对点上分

1. BCD 【解析】在三角形中,已知两边及其中一边的对角,根据余弦定理的应用条件,可以解三角形,**故 A 错误**;余弦定理揭示了任意三角形中边与角之间的关系,因此它适用于任何三角形,**故 B 正确**;利用余弦定理,可以解决已知三角形三边求角的问题,**故 C 正确**;在三角形中,勾股定理是三角形为直角三角形时余弦定理的特例,**故 D 正确**.

规律点拨 勾股定理与余弦定理的联系

(1)勾股定理指出了直角三角形中三边平方之间的关系,余弦定理则指出了一般三角形中三边平方之间的关系.

(2)由余弦定理和余弦函数的性质可以看出,在 $\triangle ABC$ 中:①若 $BC^2+AC^2=AB^2$,则 C 是直角;②若 $BC^2+AC^2<AB^2$,则 C 是钝角;③若 $BC^2+AC^2>AB^2$,则 C 是锐角.

由此可知,余弦定理是用准确的量化关系去解决问题,即用边长关系去判断三角形的形状.因此,勾股定理是余弦定理的特例,余弦定理是勾股定理的推广.

2. A 【解析】$\because a^2+b^2-c^2=kab$,$\therefore\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{kab}{2ab}=\frac{k}{2}$. $\because 0<C<\pi$,$\therefore -1<\cos C<1$,解得 $-2<k<2$,$\therefore$ 实数 k 的取值范围是 $(-2,2)$. **故 A 正确**.

规律总结 在解三角形问题时，遇到 $a^2+b^2-c^2=kab$ 型的式子（其中 a，b，c 分别为 $\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 所对的边，$k\in\mathbf{R}$），首先想到余弦定理的变形 $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{kab}{2ab}=\dfrac{k}{2}$，尤其当 $k=\pm1,\pm\sqrt{2},\pm\sqrt{3}$ 时，C 是特殊角，要在做完此题后有明确的认知并牢记规律.

3. $\dfrac{\pi}{3}$

攻略上分 由本题题干可以看出等式右边部分可直接利用射影定理变形，进而化简求解即可.

【解析】$\because 2b\cos B=a\cos C+c\cos A$，$\therefore$ 由射影定理得 $2b\cos B=b$，$\therefore \cos B=\dfrac{1}{2}$，$\because 0<B<\pi$，$\therefore B=\dfrac{\pi}{3}$.

4. C

攻略上分 本题为已知两边及其中一边的对角解三角形，符合通法攻略 11 中的类型.

【解析】$\because a=3$，$b=\sqrt{7}$，$B=60°$，$b^2=a^2+c^2-2ac\cdot\cos B$，$\therefore 7=9+c^2-2\times3\times c\times\dfrac{1}{2}$，则 $c^2-3c+2=0$，解得 $c=1$ 或 $c=2$，经检验，均符合题意. **故 C 正确.**

5. B 【解析】$\because \sin\dfrac{C}{2}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，$\therefore \cos C=1-2\sin^2\dfrac{C}{2}=1-2\times\dfrac{4}{5}=-\dfrac{3}{5}$，$\therefore$ 根据余弦定理得，$AB^2=BC^2+AC^2-2BC\cdot AC\cdot\cos C=4+25-2\times2\times5\times\left(-\dfrac{3}{5}\right)=41$，

$\therefore AB=\sqrt{41}$. **故 B 正确.**

6. B 【解析】由 $\tan\dfrac{A+B}{2}+\tan\dfrac{C}{2}=4$ 得，$\tan\dfrac{\pi-C}{2}+\tan\dfrac{C}{2}=4$，$\therefore \tan\dfrac{\pi-C}{2}+\tan\dfrac{C}{2}=\dfrac{\sin\dfrac{\pi-C}{2}}{\cos\dfrac{\pi-C}{2}}+\dfrac{\sin\dfrac{C}{2}}{\cos\dfrac{C}{2}}=\dfrac{\cos\dfrac{C}{2}}{\sin\dfrac{C}{2}}+\dfrac{\sin\dfrac{C}{2}}{\cos\dfrac{C}{2}}=4$，

$\therefore \dfrac{1}{\sin\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{C}{2}}=4$,

$\therefore \sin C=\dfrac{1}{2}$. 又 $a=2c=2$,$\therefore a=2>c=1$,

$\therefore C\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$,$\therefore C=\dfrac{\pi}{6}$,$\therefore \cos C=\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{4+b^2-1}{4b}$,解得 $b=\sqrt{3}$,**故 B 正确.**

7. C 【解析】在 $\triangle ABC$ 中,内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c,若 $a=5,b=4,c=\sqrt{21}$,则可得 $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{5^2+4^2-(\sqrt{21})^2}{2\times5\times4}=\dfrac{1}{2}$,又 $0°<C<180°$,可得 $C=60°$. **故 C 正确.**

规律方法 已知三边求解三角形的方法

若已知三角形的三边,可利用余弦定理求解出各角的大小. 注意:在已知三边求三个角时,一般先求大角后求小角.

8. A 【解析】由 $b-a=2>0,b-c=4>0$ 得 $b>a,b>c$,

所以 b 是三角形中最大的边,即 $B=\dfrac{2\pi}{3}$,

由 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$ 可得 $b^2=(b-2)^2+(b-4)^2-2(b-2)(b-4)\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)$,

化简可得 $b^2-9b+14=0$,又 $b>4$,

易错点 忽视 b 的范围,注意题目中的隐含条件,三角形中的边、角关系

故 $b=7$,**故选 A.**

9. A 【解析】由 $a=c-1,b=c+1$,得 $b>c>a>0$. 又因为 $\triangle ABC$ 为钝角三角形,所以 $\cos B<0$,即$\dfrac{c^2+(c-1)^2-(c+1)^2}{2c(c-1)}<0$,所以 $c^2-4c<0$,故 $0<c<4$. 由三角形的两边之和大于第三边,得 $c+c-1>c+1$,故 $c>2$. 故 c 的取值范围为 $(2,4)$. **故 A 正确.**

易错警示 忽略三角形的三边关系致错

由于余弦定理及其推论的变形较多，且涉及平方和、开方等运算，所以可能会因不细心而导致错误. 在利用余弦定理求出三角形的三边后，还要判断一下这三边是否满足构成三角形的条件.

10. 直角三角形或钝角三角形 【解析】已知不等式变形得 $\cos A+1\geqslant\frac{b}{c}+1$，即 $\cos A\geqslant\frac{b}{c}$①，由余弦定理得 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，代入①得 $\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\geqslant\frac{b}{c}$，整理得 $b^2+a^2\leqslant c^2$，当 $b^2+a^2=c^2$ 时，$\triangle ABC$ 为直角三角形；当 $b^2+a^2<c^2$ 时，可得 $\cos C=\frac{b^2+a^2-c^2}{2ba}<0$，即 C 为钝角，此时 $\triangle ABC$ 为钝角三角形. 综上，$\triangle ABC$ 的形状为直角三角形或钝角三角形.

方法总结 利用余弦定理判断三角形的形状的思路

(1)化边为角，再进行三角恒等变换，求出角之间的关系.

(2)化角为边，再进行代数恒等变换，求出三条边之间的关系.

一般地，若遇到的式子含角的余弦或边的二次式，则要考虑用余弦定理.

注意：统一成边的关系后，等式两边不要轻易约分，否则可能会出现漏解.

能力上分

1. B 【解析】因为 $AB>CA>BC$，所以角 C 与角 A 分别为 $\triangle ABC$ 的最大角与最小角，

提示：先由三边大小关系判断最大角与最小角，再利用余弦定理求出第三个角，由三角形内角和即可求解

由余弦定理得 $\cos B=\dfrac{AB^2+BC^2-CA^2}{2AB\times BC}=\dfrac{9+4-7}{12}=\dfrac{1}{2}$,

因为 $0°<B<180°$,所以 $B=60°$,故 $A+C=180°-60°=120°$. **故选 B.**

2. C 【解析】由余弦定理可得 $AB^2=AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cdot\cos C$, $\because\ \cos C=\dfrac{2}{3}$, $AC=4$, $BC=3$, $\therefore\ AB^2=16+9-2\times4\times3\times\dfrac{2}{3}=9$, 故 $AB=3$, 故 $\cos B=\dfrac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\cdot BC}=\dfrac{9+9-16}{2\times3\times3}=\dfrac{1}{9}$. **故选 C.**

3. C 【解析】在 $\triangle ABC$ 中,由余弦定理得 $\dfrac{a}{c}=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{b^2+c^2-a^2}=\dfrac{2ab\cos C}{2bc\cos A}$,

整理得 $\cos A=\cos C$,

又 $A,C\in(0,\pi)$,函数 $y=\cos x$ 在 $(0,\pi)$ 上单调递减,所以 $A=C$,

所以 $\triangle ABC$ 一定是等腰三角形. **故选 C.**

4. B 【解析】因为 $m>\dfrac{3}{2}$,所以 $BC-AC=5m-(m+6)=4m-6>0$,所以 $5m>m+6$,即 $BC>AC$,又 $5m>3m>0$,即 $BC>AB$,所以 $\triangle ABC$ 的三个内角中角 A 最大,则由余弦定理得 $\cos A=\dfrac{(3m)^2+(m+6)^2-(5m)^2}{2\times3m(m+6)}<0$,得 $(5m+6)(m-2)>0$,则 $m>2$. 又因为 $m+6>5m-3m$,所以 $m<6$,所以 m 的取值范围是 $(2,6)$. **故 B 正确.**

5. C 【解析】由 $6bc\cos A=-2ac\cos B$ 得 $3b\cos A=-a\cos B$①,

由 $-2ac\cos B=-3ab\cos C$ 得 $2c\cos B=3b\cos C$②,

将 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, $\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$, $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ 代入①②,化简得

$a^2=b^2+2c^2$③,

$a^2=5c^2-5b^2$④,

联立③④得 $b^2+2c^2=5c^2-5b^2\Rightarrow6b^2=3c^2\Rightarrow c^2=2b^2$,

代入③得 $a^2=b^2+2(2b^2)=5b^2$,

则 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{b^2+2b^2-5b^2}{2b\cdot\sqrt{2}b}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

因为 $A\in(0,\pi)$,所以 $A=\dfrac{3\pi}{4}$. 故选 C.

6. $(4,6]$ 【解析】由 $a\cos B+b\cos A=\dfrac{\sqrt{3}c}{2\sin C}$及射影定理,得 $c=\dfrac{\sqrt{3}c}{2\sin C}$,即 $\sin C=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. 因为 C 是锐角,所以 $C=\dfrac{\pi}{3}$. 由余弦定理得 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\dfrac{\pi}{3}=(a+b)^2-3ab\geqslant(a+b)^2-\dfrac{3(a+b)^2}{4}=\dfrac{(a+b)^2}{4}$,当且仅当 $a=b$ 时等号成立. 由 $(a+b)^2\leqslant16$,得 $a+b\leqslant4$,又 $a+b>c$,且 $c=2$,所以 $4<a+b+c\leqslant6$.

7. $\dfrac{\pi}{6}$ 【解析】因为 $2a\cos B=c-a$,由余弦定理得 $2a\cdot\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=c-a$,整理得 $c=\dfrac{b^2}{a}-a$,所以 $\dfrac{c+4a}{b}=\dfrac{\dfrac{b^2}{a}-a+4a}{b}=\dfrac{b}{a}+\dfrac{3a}{b}\geqslant2\sqrt{\dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{3a}{b}}=2\sqrt{3}$,当且仅当 $\dfrac{b}{a}=\dfrac{3a}{b}$,即 $b=\sqrt{3}a$ 时,等号成立,$\dfrac{c+4a}{b}$取最小值,此时 $c=\dfrac{b^2}{a}-a=2a$,所以 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{3a^2+4a^2-a^2}{2\sqrt{3}a\cdot2a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,又因为 $A\in(0,\pi)$,所以 $A=\dfrac{\pi}{6}$.

8. **思路导引** (1)根据条件求 AC,BC 的长,在$\triangle BCD$ 中,由余弦定理可求 BD.

(2)设 $\angle ACD=\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$,$CD=BD=a$,表示出 BC,在$\triangle BCD$ 中利用余弦定理结合同角三角函数基本关系可求 $\cos\theta$,再用二倍角公式可得结果.

【解】(1)因为 $AD\perp AC$,$AB\perp BC$,所以 $\angle BAC+\angle ACB=\angle ADC+\angle ACD=\dfrac{\pi}{2}$.

因为 CA 平分 $\angle BCD$,所以 $\angle ACB=$

$\angle ACD$,

所以 $\angle BAC=\angle ADC=\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{3}$,

$\angle ACB=\angle ACD=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}$,

故 $\angle BCD=2\angle ACD=\frac{\pi}{3}$,因为 $AD\perp AC$,

$AB\perp BC$,

所以 $AC=CD\cos\angle ACD=\sqrt{3}$, $BC=AC\cos\angle ACB=\frac{3}{2}$,

提示: 直角三角形中三角函数的定义

在 $\triangle BCD$ 中,由余弦定理得 $BD=\sqrt{BC^2+CD^2-2BC\cdot CD\cos\angle BCD}=\frac{\sqrt{13}}{2}$.

(2)设 $\angle ACD=\angle ACB=\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$,则

$\angle BCD=2\theta$.

又 $AD\perp AC$,$AB\perp BC$,设 $CD=BD=a$,

则 $AC=CD\cos\angle ACD=a\cos\theta$,

$BC=AC\cos\angle ACB=a\cos^2\theta$,

在 $\triangle BCD$ 中,由余弦定理得

$\cos\angle BCD=\cos 2\theta=\frac{CD^2+BC^2-BD^2}{2CD\cdot BC}=\frac{a^2+a^2\cos^4\theta-a^2}{2a\cdot a\cos^2\theta}=\frac{1}{2}\cos^2\theta$,

因为 $\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$,所以 $\frac{1}{2}\cos^2\theta=2\cos^2\theta-1$,

解得 $\cos\theta=\frac{\sqrt{6}}{3}$,

则 $\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=2\times\frac{2}{3}-1=\frac{1}{3}$,

提示: 二倍角的余弦公式

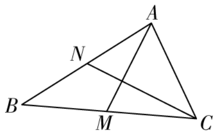
即 $\cos\angle BCD=\frac{1}{3}$.

9.【解】(1)如图,因为 M,N 分别为边 BC,AB 的中点,所以 $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})=\frac{1}{2}\cdot(-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$.

因为 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CN}=0$,所以 $\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)=0$,所以 $\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}^2-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}\cdot$

$\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}^2=0$,

所以 $c^2-bc\cos\angle BAC-2b^2=0$,由余弦定理的推论 $\cos\angle BAC=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ 得,$c^2-bc\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}-2b^2=0$,所以 $5b^2=c^2+a^2$,所以 $\frac{a^2+c^2}{b^2}=5$.



(2)因为 $\triangle ABC$ 为锐角三角形,所以 $\begin{cases}\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}>0,\\ \cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}>0,\\ \cos C=\frac{b^2+a^2-c^2}{2ab}>0,\end{cases}$ 即 $b^2+c^2>a^2$,$a^2+c^2>b^2$,$b^2+a^2>c^2$,又 $5b^2=c^2+a^2$,所以 $3a^2>2c^2$,$3c^2>2a^2$,所以 $\frac{2}{3}<\frac{c^2}{a^2}<\frac{3}{2}$,即 $\frac{\sqrt{6}}{3}<\frac{c}{a}<\frac{\sqrt{6}}{2}$.

所以 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{a^2+c^2-\frac{1}{5}(a^2+c^2)}{2ac}=\frac{2}{5}\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)$,令 $t=\frac{c}{a}$,则 $\frac{\sqrt{6}}{3}<t<\frac{\sqrt{6}}{2}$,所以 $\cos B=\frac{2}{5}\left(t+\frac{1}{t}\right)$,令 $f(t)=t+\frac{1}{t}$,则 $f(t)$ 在 $\left(\frac{\sqrt{6}}{3},1\right)$ 上单调递减,在 $\left(1,\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$ 上单调递增,

又 $f(1)=2$,$f\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)=f\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)=\frac{5\sqrt{6}}{6}$,所以 $2\leqslant t+\frac{1}{t}<\frac{5\sqrt{6}}{6}$,所以 $\frac{4}{5}\leqslant\cos B<\frac{\sqrt{6}}{3}$,

即 $\cos B$ 的取值范围为 $\left[\frac{4}{5},\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$.

课时 2　正弦定理

对点上分

1. B　【解析】在 $\triangle ABC$ 中,由正弦定理的变形可得 $a=2R\sin A$,$b=2R\sin B$,$c=2R\sin C$(其中 R 为 $\triangle ABC$ 的外接圆半

径)，故有 $a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$，**故 A 正确；**

若 $\sin 2A=\sin 2B$，则 $2A=2B$ 或 $2A+2B=\pi$，可得 $A=B$ 或 $A+B=\frac{\pi}{2}$，**故 B 错误；**

若 $A>B$ 成立，则有 $BC>AC$，$\because BC=2R\sin A, AC=2R\sin B$（其中 R 为 $\triangle ABC$ 的外接圆半径），$\therefore \sin A>\sin B$ 成立，**故 C 正确；**

由 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，再根据比例式的性质可得 **D 正确.**

2. B 【解析】在 $\triangle ABC$ 中，因为 $B+C=60°$，所以 $A=120°$，所以 $\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin 120°}{3}=\frac{\sqrt{3}}{6}$，由正弦定理以及比例式的性质可得 $\frac{\sin A+\sin B-\sin C}{a+b-c}=\frac{\sin A}{a}=\frac{\sqrt{3}}{6}$. **故 B 正确.**

3. D

攻略上分 本题为已知两角及一边解三角形，符合通法攻略 12 中的类型.

【解析】因为 $\angle BAC=60°$，$\angle ABC=75°$，所以 $\angle ACB=180°-60°-75°=45°$，由正弦定理得 $\frac{AB}{\sin\angle ACB}=\frac{BC}{\sin\angle BAC}$，即 $\frac{2\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{BC}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$，解得 $BC=2\sqrt{3}$. **故选 D.**

4. B 【解析】在 $\triangle ABC$ 中，因为 $b=\sqrt{2}$，$B=\frac{\pi}{6}$，$\cos A=-\frac{3}{5}$，所以 $\sin A=\frac{4}{5}$，由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，可得 $a=\frac{b\sin A}{\sin B}=\frac{\sqrt{2}\times\frac{4}{5}}{\frac{1}{2}}=\frac{8\sqrt{2}}{5}$. **故 B 正确.**

5. D 【解析】在 $\triangle ABC$ 中，$A=60°$，$AC=2$，$BC=2\sqrt{3}$，由正弦定理得 $\frac{BC}{\sin A}=\frac{AC}{\sin B}$，即 $\frac{2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2}{\sin B}$，解得 $\sin B=\frac{1}{2}$，又 $AC<BC$，所以 $B<A$，即 $0°<B<60°$，所以 $B=30°$. **故**

D 正确.

易错警示 忽略三角形中大边对大角而致错

已知三角形的两边及其中一边的对角,利用正弦定理求另一边的对角时,由于三角形内角的正弦值都为正,所以当所得内角的正弦值大于 0 且小于 1 时,这个内角可能为锐角,也可能为钝角,因此需要根据题中的隐含条件来判断角的情况.

方法总结 (1)若已知两边和其中一边的对角,利用正弦定理解三角形时,需要判断三角形有几个解,防止漏解或多解.(2)判断三角形解的个数时可以选择代数法,也可以根据条件画出图形,通过图形直观判断.

6. C 【解析】由正弦定理可得 $\frac{2\sqrt{2}}{\sin C}=\frac{\frac{4\sqrt{3}}{3}}{\sin\frac{\pi}{4}}$,所以 $\sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}$,而 $C\in\left(0,\frac{3\pi}{4}\right)$,可得 $C=\frac{\pi}{3}$ 或 $C=\frac{2\pi}{3}$. 经检验,均符合题意,**故 C 正确.**

7. BC

攻略上分 本题为已知三角形的部分情况判断三角形解的个数,可利用通法攻略 13 求解.

【解析】由 $b>a$ 得 $B>A$,此时三角形显然不存在,**故 A 错误;**

由正弦定理得 $\frac{1}{\sin 30°}=\frac{4}{\sin B}$,则 $\sin B=2$,显然角 B 不存在,**故 B 正确;**

由正弦定理得 $\frac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{\sin B}$,所以 $\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$,因为 $b>a$,所以 $B>A$,故 $B=60°$ 或 $B=120°$,**故 C 正确;**

若 $A=60°$,$a=b=2$,则 $\triangle ABC$ 为等边三角形,唯一确定,**故 D 错误.**

8. C　【解析】$\triangle ABC$ 中满足条件的角 A 有两个不同的值，即三角形有两解，根据三角形解的个数为 2，$a=6$，$b=x$，$B=\frac{\pi}{3}$，可得 $x>6\sin\frac{\pi}{3}=3\sqrt{3}$，且 $x<6$，所以 $3\sqrt{3}<x<6$. **故 C 正确.**

9. D　【解析】因为 $B=\frac{\pi}{4}$，$b=6\sqrt{2}$，所以由正弦定理可得，$\sin A=\frac{a\sin B}{b}=\frac{a}{12}$，

当 $0<a\leqslant b=6\sqrt{2}$ 时，$A\leqslant B$，A 有一解，即 $\triangle ABC$ 有一解，

当 $6\sqrt{2}<a<12$ 时，$A>B$，A 有两解，即 $\triangle ABC$ 有两解，

当 $a=12$ 时，$\sin A=1$，$A=\frac{\pi}{2}$，A 有一解，即 $\triangle ABC$ 有一解，

当 $a>12$ 时，$\sin A>1$，A 无解，即 $\triangle ABC$ 无解.

综上所述，若 $\triangle ABC$ 有一解，则实数 a 的取值范围是 $(0,6\sqrt{2}]\cup\{12\}$.

10. A

攻略上分　本题可观察到不等式 $a>2b$ 两边是齐次的边长关系，故可利用通法攻略 14 将其转化为角的关系，进而判断求解.

【解析】由 $a>2b$ 及正弦定理，得 $\sin A>2\sin B$. 因为 $\sin B=\sin(\pi-B)=\sin(A+C)$，所以 $\sin A>2\sin(A+C)$. 反之亦成立，所以“$a>2b$”是“$\sin A>2\sin(A+C)$”的充要条件. **故 A 正确.**

11.【解】(1) $\because c=a(1+2\cos B)$，$\therefore$ 由正弦定理可得 $\sin C=\sin A\cdot(1+2\cos B)$.

又 $A+B+C=\pi$，$\therefore \sin C=\sin(A+B)$，

$\therefore \sin(A+B)-2\sin A\cos B=\sin A$，即 $\cos A\sin B-\sin A\cos B=\sin A$，

$\therefore \sin(B-A)=\sin A$，$\therefore B-A=A$ 或 $B-A+A=\pi$（舍去），$\therefore B=2A$.

$\because B=\frac{\pi}{3}$，$\therefore A=\frac{\pi}{6}$，

$\therefore C=\frac{\pi}{2}$.

(2) 由题意及(1)得，在 $\triangle ABC$ 中，$B=2A$，

由正弦定理得，$\frac{b}{a}=\frac{\sin B}{\sin A}=\frac{\sin 2A}{\sin A}=2\cos A$.

$\because$ $\triangle ABC$ 为锐角三角形，

$\therefore \begin{cases}0<A<\frac{\pi}{2},\\0<2A<\frac{\pi}{2},\\0<\pi-A-2A<\frac{\pi}{2},\end{cases}$ 解得 $\frac{\pi}{6}<A<\frac{\pi}{4}$，

$\therefore \sqrt{2}<2\cos A<\sqrt{3}$，

$\therefore \frac{b}{a}$ 的取值范围为 $(\sqrt{2},\sqrt{3})$.

12. B 【解析】在 $\triangle ABC$ 中，$3a=2\sqrt{3}b\sin A$，利用正弦定理得 $3\sin A=2\sqrt{3}\sin B\sin A$. 因为 $\sin A\neq 0$，故 $\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$. 由于 $0<B<\pi$，故 $B=\frac{\pi}{3}$ 或 $B=\frac{2\pi}{3}$，又由于 $\cos B=\cos C$，所以 $B=C$，故 $B=\frac{\pi}{3}$，所以 $B=C=A=\frac{\pi}{3}$，所以 $\triangle ABC$ 为等边三角形. **故 B 正确.**

方法总结 判断三角形的形状就是根据已知条件判断三角形是否为某些三角形（如锐角、直角、钝角、等腰、等边三角形等）. 这类题目的解答通常有以下两种思路：

(1) 化边为角：根据正弦定理把已知条件中边和角的混合关系转化为角的关系，再进行三角恒等变换，得到角的三角函数值或角的三角函数值之间的关系，进而得到三角形的角与角的关系，从而确定三角形的形状；

(2) 化角为边：根据正弦定理把已知条件中边和角的混合关系转化为边的关系，然后通过整理得到边与边之间的数量关系，从而确定三角形的形状.

在运用上述两种方法时，都不应随便约去公因式，以免漏解.

13. C 【解析】由 $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}=\frac{\sin(A+B)}{\sin(A-B)}$，得 $(a^2+b^2)\sin(A-B)=(a^2-b^2)\cdot\sin(A+B)\ (a\neq$

b)，∴ $(a^2+b^2)\cdot(\sin A\cos B-\cos A\sin B)=(a^2-b^2)(\sin A\cos B+\cos A\sin B)(a\neq b)$，∴ $(a^2+b^2)(a\cos B-b\cos A)=(a^2-b^2)(a\cos B+b\cos A)(a\neq b)$，∴ $(a^2+b^2)\left(a\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}-b\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)=(a^2-b^2)\left(a\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}+b\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)(a\neq b)$，∴ $a^2+b^2=c^2$，且 $a\neq b$，∴ $\triangle ABC$ 是直角三角形但一定不是等腰三角形. **故 C 正确.**

14. C 【解析】对于甲：$a\cos A=b\cos B$，由正弦定理可得 $\sin A\cos A=\sin B\cos B$，则 $\sin 2A=\sin 2B$. 又 $A,B,A+B\in(0,\pi)$，所以 $2A=2B$ 或 $2A=\pi-2B$，即 $A=B$ 或 $A+B=\frac{\pi}{2}$，所以 $A=B$ 或 $C=\frac{\pi}{2}$，所以 $\triangle ABC$ 为等腰三角形或直角三角形且 $C=\frac{\pi}{2}$.

对于乙：$a^2\tan B=b^2\tan A$，由正弦定理可得 $\sin^2A\tan B=\sin^2B\tan A$，所以 $\sin^2A\cdot\frac{\sin B}{\cos B}=\sin^2B\cdot\frac{\sin A}{\cos A}$，又 $A,B\in(0,\pi)$，所以 $\sin A>0$，$\sin B>0$，所以 $\sin A\cos A=\sin B\cos B$，则 $\sin 2A=\sin 2B$，又 $A,B,A+B\in(0,\pi)$，所以 $2A=2B$ 或 $2A=\pi-2B$，即 $A=B$ 或 $A+B=\frac{\pi}{2}$，所以 $A=B$ 或 $C=\frac{\pi}{2}$，所以 $\triangle ABC$ 为等腰三角形或直角三角形且 $C=\frac{\pi}{2}$.

对于丙：$a\cos B=b\cos A$，由正弦定理可得 $\sin A\cos B=\sin B\cos A$，所以 $\sin(A-B)=0$，又 $A,B\in(0,\pi)$，所以 $A-B\in(-\pi,\pi)$，所以 $A-B=0$，即 $A=B$，所以 $\triangle ABC$ 为等腰三角形.

对于丁：$a-b=c\cos B-c\cos A$，由正弦定理可得 $\sin A-\sin B=\sin C\cos B-\sin C\cos A$，所以 $\sin(B+C)-\sin(A+C)=\sin C\cos B-\sin C\cos A$，即 $\sin B\cos C+\cos B\sin C-\sin A\cos C-\cos A\sin C=\sin C\cos B-$

$\sin C\cos A$，所以 $\sin B\cos C-\sin A\cos C=0$，即 $(\sin B-\sin A)\cos C=0$，所以 $\cos C=0$ 或 $\sin B-\sin A=0$，又 $A,B,C\in(0,\pi)$ 且 $A+B+C=\pi$，所以 $C=\frac{\pi}{2}$ 或 $A=B$，所以 $\triangle ABC$ 为等腰三角形或直角三角形且 $C=\frac{\pi}{2}$.

15. B 【解析】依题意得，$\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}AB\times AC\times\sin\angle BAC=\frac{1}{2}\times4\times3\times\frac{1}{2}=3$. **故选** B.

16. D 【解析】因为 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{\sqrt{3}}{4}ab=\sqrt{3}$，所以 $ab=4$，

又 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=(a+b)^2-2ab-ab=25-3ab=25-12=13$，

所以 $c=\sqrt{13}$. **故选** D.

17. A 【解析】由题知 $\sin 2A+\sin 2C+\sin 2B=1$，

即 $\sin[(A+C)+(A-C)]+\sin[(A+C)-(A-C)]+2\sin B\cos B=1$，

提示：用和、差角的正弦公式及二倍角公式化简

即 $2\sin(A+C)\cos(A-C)+2\sin B\cos B=1$，

又 $A+B+C=\pi$，所以 $\sin(A+C)=\sin B$，$\cos(A+C)=-\cos B$，

所以 $2\sin B\cos(A-C)-2\sin B\cos(A+C)=1$，

即 $2\sin B[\cos(A-C)-\cos(A+C)]=1$，

所以 $4\sin B\sin A\sin C=1$，$\sin B\sin A\sin C=\frac{1}{4}$.

因为 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=2$，又 $a=2R\sin A$，$b=2R\sin B$，所以 $\frac{1}{2}\cdot2R\sin A\cdot2R\sin B\cdot\sin C=2$，

所以 $R^2\sin A\sin B\sin C=1$，

所以 $R^2=4$，解得 $R=2$. **故选** A.

18. **思路导引** (1)应用向量数量积的定义及三角形面积公式可得 $\tan C=-\sqrt{3}$，结合角的范围求其大小；(2)由(1)得 $ab=4$，由余弦定理得 $c^2=a^2+b^2+4$，再应用基本不等式求三角形周长的最小值.

【解】(1)设 $BC=a,AC=b$,则 $ab\cos C=-2$①,$\frac{1}{2}ab\sin C=\sqrt{3}$②,

②÷①,得 $\frac{1}{2}\tan C=-\frac{\sqrt{3}}{2}$,解得 $\tan C=-\sqrt{3}$,又 $0<C<\pi$,所以 $C=\frac{2\pi}{3}$.

(2)由(1)知 $\frac{1}{2}ab\sin C=\sqrt{3}$,所以 $ab=4$,

设 $AB=c$,由余弦定理得 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=a^2+b^2+ab=a^2+b^2+4$,

$\triangle ABC$ 的周长为 $a+b+c=a+b+\sqrt{a^2+b^2+4}\geqslant 2\sqrt{ab}+\sqrt{2ab+4}=4+2\sqrt{3}$,当且仅当 $a=b=2$ 时取等号,所以 $\triangle ABC$ 周长的最小值为 $4+2\sqrt{3}$.

能力上分

1. B 【解析】已知在 $\triangle ABC$ 中,$A=\frac{\pi}{6}$,$BC=\sqrt{2}$,$AB=\sqrt{6}$,

根据正弦定理 $\frac{BC}{\sin A}=\frac{AB}{\sin C}$,可得 $\sin C=\frac{AB\sin A}{BC}=\frac{\sqrt{6}\times\sin\frac{\pi}{6}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}\times\frac{1}{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

因为 $AB>BC$,所以 $C>A$,又因为 $0<C<\pi$,

所以 $C=\frac{\pi}{3}$ 或 $C=\frac{2\pi}{3}$,

即"$AB=\sqrt{6}$"不能推出"$C=\frac{\pi}{3}$";

已知在 $\triangle ABC$ 中,$A=\frac{\pi}{6}$,$BC=\sqrt{2}$,$C=\frac{\pi}{3}$,

根据正弦定理 $\frac{BC}{\sin A}=\frac{AB}{\sin C}$,可得 $AB=\frac{BC\sin C}{\sin A}=\frac{\sqrt{2}\times\sin\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=\sqrt{6}$,

即"$C=\frac{\pi}{3}$"可以推出"$AB=\sqrt{6}$".

综上,"$AB=\sqrt{6}$"是"$C=\frac{\pi}{3}$"的必要不充分条件. **故选 B.**

2. BD 【解析】$\sin^2A+\sin^2B<1-\cos^2C=\sin^2C$,由正弦定理得 $a^2+b^2<c^2$,由余弦定理的推论得 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}<0$,又 $0<C<$

π，所以 $C\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，则 $\triangle ABC$ 为钝角三角形，**故 A 正确.**

在 $\triangle ABC$ 中，由正弦定理得 $\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，所以 $\sin C=\frac{c\sin B}{b}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. 又 $0<C<\pi$，所以 $C=\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{2\pi}{3}$，所以 $A=\frac{\pi}{2}$ 或 $\frac{\pi}{6}$. 又 $\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}bc\sin A$，所以 $S=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 或 $S=\frac{\sqrt{3}}{4}$，**故 B 错误.**

因为 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，所以 $A+B>\frac{\pi}{2}$，则 $\frac{\pi}{2}>A>\frac{\pi}{2}-B>0$，所以 $\sin A>\sin\left(\frac{\pi}{2}-B\right)=\cos B$，**故 C 正确.**

若 $\triangle ABC$ 有两解，则 $a\sin B<b<a$，即 $3<b<2\sqrt{3}$，**故 D 错误. 故选 BD.**

3. B

思路导引 设 $AC>AB$，利用面积比可得 $\frac{BN}{NC}=\frac{AB}{AC}=\frac{1}{2}$，结合等面积法可得 $AC=12,AB=6$，即可利用向量的模求解.

【解析】不妨设 $AC>AB$，由 $\frac{S_{\triangle ABN}}{S_{\triangle ACN}}=\frac{BN}{NC}=\frac{\frac{1}{2}AB\cdot AN\sin\frac{\pi}{3}}{\frac{1}{2}AC\cdot AN\sin\frac{\pi}{3}}\Rightarrow\frac{BN}{NC}=\frac{AB}{AC}$，

因为 $BC=6MN$，$MC=\frac{1}{2}BC$，所以 $BN=BM-NM=\frac{1}{2}BC-\frac{1}{6}BC=\frac{1}{3}BC$，$CN=MC+NM=\frac{1}{2}BC+\frac{1}{6}BC=\frac{2}{3}BC$，

所以 $\frac{BN}{NC}=\frac{AB}{AC}=\frac{1}{2}$.

又 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABN}+S_{\triangle ACN}=\frac{1}{2}AB\cdot AN\cdot\sin\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}AC\cdot AN\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}AC\cdot AB\sin\frac{2\pi}{3}$，

化简得 $4(AB+AC)=AC\cdot AB$，故 $AC=12$，

$AB=6$,

所以 $|\overrightarrow{AM}|=\frac{1}{2}\cdot|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|$

$=\frac{1}{2}\sqrt{\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AC}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}$

$=\frac{1}{2}\times\sqrt{36+144+2\times6\times12\times\left(-\frac{1}{2}\right)}$

$=3\sqrt{3}$,**故选** B.

4. D

思路导引 由 $a\cos B=(2c-b)\cos A$ 结合正弦定理和三角函数恒等变换公式可求得 $A=\frac{\pi}{3}$,再结合余弦定理得 $bc\leqslant9$,从而可求出三角形面积的最大值,进而可求出 AM 的最大值.

【解析】因为 $a\cos B=(2c-b)\cos A$,

所以由正弦定理得 $\sin A\cos B=(2\sin C-\sin B)\cos A=2\sin C\cos A-\sin B\cos A$,

所以 $\sin A\cos B+\sin B\cos A=2\sin C\cos A$,

所以 $\sin(A+B)=\sin C=2\sin C\cos A$,

因为 $\sin C\neq0$,所以 $\cos A=\frac{1}{2}$,

因为 $A\in(0,\pi)$,所以 $A=\frac{\pi}{3}$,

因为 $a=3$,所以由余弦定理得 $9=b^2+c^2-2bc\cos A=b^2+c^2-bc\geqslant2bc-bc=bc$,

当且仅当 $b=c=3$ 时取等号,

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{\sqrt{3}}{4}bc\leqslant\frac{9\sqrt{3}}{4}$.

因为 AM 是 $\triangle ABC$ 的高,所以 $\frac{1}{2}a\cdot AM\leqslant\frac{9\sqrt{3}}{4}$,

所以 $AM\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}$,

所以 AM 的最大值为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. **故选** D.

5. $\left[\frac{7}{8},\frac{5\sqrt{2}}{8}\right]$ 【解析】$\because 2(a\sin A-c\sin B\cos A)=b\sin B$,$\therefore$ 由正弦定理可得 $2(a^2-bc\cos A)=b^2$,整理可得 $2a^2-2bc\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=b^2$,$\therefore 3a^2=2b^2+c^2$,可得 $a^2=$

$\frac{2b^2+c^2}{3}$，∴ $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{\frac{b^2}{3}+\frac{2c^2}{3}}{2bc}=\frac{1}{6}\left(\frac{b}{c}+\frac{2c}{b}\right)\geqslant\frac{1}{6}\times2\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{3}$，当且仅当 $b=\sqrt{2}c$ 时取等号. 又 $\cos A<1$，∴ $\frac{\sqrt{2}}{3}\leqslant\cos A<1$. 不等式 $30\lambda\cos(B+C)+9\cos 2A+16\lambda^2+5\leqslant0$，可化为 $-30\lambda\cos A+9(2\cos^2A-1)+16\lambda^2+5\leqslant0$，令 $t=\cos A\in\left[\frac{\sqrt{2}}{3},1\right)$，则该不等式可以化为 $9t^2-15\lambda t+8\lambda^2-2\leqslant0$，它在 $t\in\left[\frac{\sqrt{2}}{3},1\right)$ 上恒成立. 令 $h(t)=9t^2-15\lambda t+8\lambda^2-2$，则 $\begin{cases}h\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)\leqslant0,\\h(1)\leqslant0,\end{cases}$ 解得 $\frac{7}{8}\leqslant\lambda\leqslant\frac{5\sqrt{2}}{8}$. 故 λ 的取值范围为 $\left[\frac{7}{8},\frac{5\sqrt{2}}{8}\right]$.

6. 【解】(1) 因为 $AB\parallel CD$，$AB=2\sqrt{6}$，$\cos\angle ADB=\frac{1}{3}$，$\cos\angle A=\frac{\sqrt{6}}{3}$，所以 $\sin\angle A=\sqrt{1-\cos^2\angle A}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\sin\angle ADB=\sqrt{1-\cos^2\angle ADB}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，$\angle ABD=\angle BDC$，又 $\angle A+\angle ADB+\angle ABD=\pi$，所以 $\angle BDC=\pi-(\angle A+\angle ADB)$，则 $\cos\angle BDC=\cos[\pi-(\angle A+\angle ADB)]=-\cos(\angle A+\angle ADB)=-\cos\angle A\cos\angle ADB+\sin\angle A\sin\angle ADB=\frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}-\frac{\sqrt{6}}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{\sqrt{6}}{9}$，所以 $\cos\angle BDC=\cos\angle ABD=\frac{\sqrt{6}}{9}$，所以 $\sin\angle ABD=\sqrt{1-\cos^2\angle ABD}=\frac{5\sqrt{3}}{9}$. 在 $\triangle ADB$ 中，由正弦定理得 $\frac{AD}{\sin\angle ABD}=\frac{AB}{\sin\angle ADB}$，所以 $\frac{AD}{\frac{5\sqrt{3}}{9}}=\frac{2\sqrt{6}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}}$，所以 $AD=5$.

(2) 在 $\triangle ABD$ 中，由正弦定理得 $\frac{BD}{\sin\angle A}=\frac{AB}{\sin\angle ADB}$，可得 $\frac{BD}{\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{2\sqrt{6}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}}$，解得 $BD=3$. 由

于 $\cos\angle BDC=\frac{\sqrt{6}}{9}$，$CD=\sqrt{6}$，在$\triangle BCD$中，由余弦定理可得 $BC=\sqrt{CD^2+BD^2-2CD\cdot BD\cdot\cos\angle BDC}=\sqrt{6+9-2\times\sqrt{6}\times3\times\frac{\sqrt{6}}{9}}=\sqrt{11}$.

7. **思路导引** （1）利用向量的坐标运算以及正、余弦定理即可求出 A；

（2）用$\{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\}$表示$\overrightarrow{AD}$，根据 $AD=1$ 得出 $c^2+9b^2+3bc=16$，再结合基本不等式和三角形面积公式即可求解；

（3）利用正弦定理得出 $b=2\sqrt{3}\sin B$，$c=2\sqrt{3}\sin C$，进而化简得出 $b+c=6\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)$，再结合锐角三角形的信息即可求解.

【解】（1）由题意得 $(a+b)(\sin B-\sin A)=(b-c)\sin C$，

由正弦定理得 $(a+b)(b-a)=(b-c)c$，即 $b^2+c^2-bc=a^2$，

由余弦定理得 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1}{2}$，

因为 $A\in(0,\pi)$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$.

（2）由题意得 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$，

则 $\overrightarrow{AD}^2=\frac{1}{16}\overrightarrow{AB}^2+\frac{9}{16}\overrightarrow{AC}^2+\frac{3}{8}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$，得 $\frac{1}{16}c^2+\frac{9}{16}b^2+\frac{3}{16}bc=1$，

即 $c^2+9b^2+3bc=16\geqslant2\sqrt{c^2\cdot9b^2}+3bc=9bc$，$bc\leqslant\frac{16}{9}$，

当且仅当 $c=3b=\frac{4\sqrt{3}}{3}$ 时等号成立，

$\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{2}bc\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{4}bc\leqslant\frac{4\sqrt{3}}{9}$，则$\triangle ABC$面积的最大值为$\frac{4\sqrt{3}}{9}$.

（3）由正弦定理 $\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{a}{\sin A}=\frac{3}{\sin\frac{\pi}{3}}=2\sqrt{3}$，得 $b=2\sqrt{3}\sin B$，$c=2\sqrt{3}\sin C$，

所以 $b+c=2\sqrt{3}\left[\sin B+\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}-B\right)\right]$

$=2\sqrt{3}\left(\sin B+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos B+\dfrac{1}{2}\sin B\right)$

$=2\sqrt{3}\left(\dfrac{3}{2}\sin B+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos B\right)$

$=6\sin\left(B+\dfrac{\pi}{6}\right)$,

因为△ABC 为锐角三角形,所以 $0<B<\dfrac{\pi}{2}$,$0<\dfrac{2\pi}{3}-B<\dfrac{\pi}{2}$,得$\dfrac{\pi}{6}<B<\dfrac{\pi}{2}$,

则 $\dfrac{\pi}{3}<B+\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{2\pi}{3}$,$\sin\left(B+\dfrac{\pi}{6}\right)\in\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},1\right]$,所以 $b+c=6\sin\left(B+\dfrac{\pi}{6}\right)\in(3\sqrt{3},6]$,

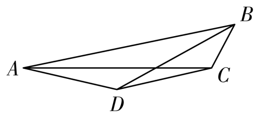
故△ABC 周长的取值范围为$(3+3\sqrt{3},9]$.

课时 3 余弦定理、正弦定理应用举例

对点上分

1. B 【解析】在△ABC 中,$AB=100$ mm,$BC=35$ mm,$\angle ACB=53.2°$,由余弦定理可得 $AB^2=BC^2+AC^2-2BC\cdot CA\cos 53.2°$,即 $100^2=35^2+AC^2-2\times35AC\cos 53.2°$,因为 $\sin 53.2°\approx0.8$,所以$\cos 53.2°\approx0.6$,解得 $AC\approx117$ mm 或 $AC\approx-75$ mm(舍),所以 $AA_0=A_0C-AC=A_0B_0+BC-AC\approx100+35-117=18$(mm).**故 B 正确.**

2. D 【解析】如图所示.



在△BCD 中,$CD=80$ m,$\angle BDC=15°$,$\angle BCD=\angle ACB+\angle DCA=120°+15°=135°$,∴ $\angle CBD=30°$,由正弦定理得 $\dfrac{BD}{\sin 135°}=\dfrac{80}{\sin 30°}$,解得 $BD=80\sqrt{2}$ m. 在△ACD 中,$CD=80$ m,$\angle DCA=15°$,$\angle ADC=\angle ADB+\angle BDC=135°+15°=150°$,∴ $\angle CAD=15°$,∴ $AD=CD=80$ m.

在△ABD 中,由余弦定理得 $AB^2=AD^2+BD^2-2AD\cdot BD\cdot\cos\angle ADB=80^2+(80\sqrt{2})^2-2\times80\times80\sqrt{2}\times\cos 135°=80^2\times5$,

$\therefore AB=80\sqrt{5}$ m，即 A,B 两点间的距离为 $80\sqrt{5}$ m. **故 D 正确.**

方法总结 求距离问题时的注意事项

（1）选定或确定所求量所在的三角形. 若其他量已知，则直接解；若有未知量，则把未知量放在另一确定的三角形中求解.

（2）确定用正弦定理还是余弦定理，如果都可用，就选择更便于计算的定理.

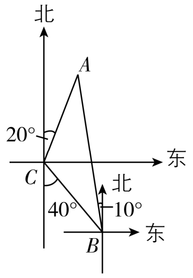
3. A 【解析】由题意可得 $OA=\sqrt{3}OP$，$OB=\frac{\sqrt{3}}{3}OP$，$OC=OP$，因为 $\angle OBC+\angle OBA=\pi$，所以 $\cos\angle OBC+\cos\angle OBA=0$，且 $AB=BC=75$ 米. 在 $\triangle OAB$ 中，由余弦定理可得 $\cos\angle OBA=\frac{OB^2+BA^2-OA^2}{2OB\cdot BA}=\frac{\frac{1}{3}OP^2+75^2-3OP^2}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}OP\cdot 75}$①，在 $\triangle OBC$ 中，由余弦定理可得 $\cos\angle OBC=\frac{OB^2+BC^2-OC^2}{2OB\cdot BC}=\frac{\frac{1}{3}OP^2+75^2-OP^2}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}OP\cdot 75}$②，由①+②整理可得 $2\times75^2=\left(4-\frac{2}{3}\right)OP^2$，解得 $OP=15\sqrt{15}$ 米. **故 A 正确.**

4. C 【解析】由题意可知，$\triangle ABC$ 是等腰三角形，所以 $BC=AB=100$ m，在 $\triangle BCD$ 中，$\frac{CD}{\sin\angle CBD}=\frac{BC}{\sin\angle BDC}$，即 $\frac{60}{\sin 30^\circ}=\frac{100}{\sin\angle BDC}$，得 $\sin\angle BDC=\frac{5}{6}$，$\sin\angle BDC=\sin\angle BDE=\cos\theta=\frac{5}{6}$. **故 C 正确.**

5. C 【解析】由题意，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ABC=70^\circ+35^\circ=105^\circ$，$\cos\angle ABC=\cos(60^\circ+45^\circ)=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$，$AB=40$ 海里，$BC=40\sqrt{2}$ 海里，根据余弦定理得 $AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos\angle ABC=40^2+(40\sqrt{2})^2-2\times40\times40\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}=3\,200+1$

$600\sqrt{3}$，∴ $AC=20(\sqrt{6}+\sqrt{2})$ 海里. 根据正弦定理 $\frac{BC}{\sin\angle CAB}=\frac{AC}{\sin 105°}$ 和 $\sin 105°=\sin(60°+45°)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ 得，$\sin\angle CAB=\frac{\sqrt{2}}{2}$，易知 $\angle CAB$ 为锐角，∴ $\angle CAB=45°$，∴ 此船航行的方向和路程（海里）分别为北偏东 65°，$20(\sqrt{6}+\sqrt{2})$. **故 C 正确.**

6. D 【解析】如图，设在 A 处两船相遇，则由题意得 $\angle ACB=180°-20°-40°=120°$，$\angle ABC=40°-10°=30°$，所以 $\angle A=30°$，所以 $\triangle ABC$ 是等腰三角形，所以 $AC=BC=20\sqrt{3}$ km. 由余弦定理，得 $AB^2=AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cdot\cos\angle ACB=(20\sqrt{3})^2+(20\sqrt{3})^2-2\times 20\sqrt{3}\times 20\sqrt{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)=3\ 600$，解得 $AB=60$ km. 因为海盗船的速度大小为 $20\sqrt{3}$ km/h，1 h 即可到达 A 处，所以海警船的速度大小至少是 60 km/h. **故 D 正确.**



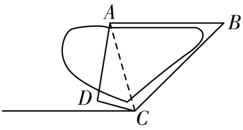
6.4 节测上分

1. A 【解析】设 $\triangle ABC$ 中，内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，∵ $\sin A:\sin B:\sin C=2:3:4$，∴ 由正弦定理得 $a:b:c=2:3:4$，不妨设 $a=2k,b=3k,c=4k(k>0)$，则 A 是最小角，由余弦定理得 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{9k^2+16k^2-4k^2}{2\times 3k\times 4k}=\frac{7}{8}$. **故 A 正确.**

2. B 【解析】因为 $b\cos C+c\cos B=4$，所以由射影定理得 $a=4$. 又因为 $\frac{\sin B+\sin C}{\sin A}=3$，由正弦定理可得 $\frac{b+c}{a}=3$，且 $b=5$，即 $\frac{5+c}{4}=3$，解得 $c=7$，所以 $S=$

$\sqrt{\frac{1}{4}\left[a^2c^2-\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2}\right)^2\right]}=4\sqrt{6}$. **故 B 正确.**

3. C 【解析】如图,连接 AC,可得 $\angle ABC=45°$, $\angle ACD=75°-15°=60°$, $\angle BCD=75°+45°=120°$, $\angle ACB=60°$, $AB=10\sqrt{3}$ km, $CD=4\sqrt{2}$ km,在 $\triangle ABC$ 中,由正弦定理得 $\frac{AB}{\sin\angle ACB}=\frac{AC}{\sin\angle ABC}$,即 $\frac{10\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{AC}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$,则 $AC=10\sqrt{2}$ km,在 $\triangle ACD$ 中,由余弦定理得 $AD^2=AC^2+CD^2-2AC\cdot CD\cos\angle ACD=152$,则 $AD=2\sqrt{38}$ km. **故 C 正确.**



4. B 【解析】因为 $a\sin B=b\sin\left(A+\frac{\pi}{3}\right)$,由正弦定理得 $\sin A\sin B=\sin B\cdot\sin\left(A+\frac{\pi}{3}\right)$. 又由 $B\in(0,\pi)$,可得 $\sin B>0$,所以 $\sin A=\sin\left(A+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\sin A+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A$,可得 $\sin A=\sqrt{3}\cos A$,即 $\tan A=\sqrt{3}$. 因为 $A\in(0,\pi)$,所以 $A=\frac{\pi}{3}$,又由 $a=2\sqrt{3}$,所以 $\triangle ABC$ 的外接圆的直径 $2R=\frac{a}{\sin A}=\frac{2\sqrt{3}}{\sin\frac{\pi}{3}}=4$,可得 $R=2$,所以 $\triangle ABC$ 的外接圆的半径为 2. **故 B 正确.**

5. A 【解析】因为点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心,且 $\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN}=y\overrightarrow{AC}$,所以 $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x}\overrightarrow{AM}+\frac{1}{y}\overrightarrow{AN}\right)$,因为 M,G,N 三点共线,所以 $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=1$,即 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=3$,所以 $2x+y=\frac{1}{3}(2x+y)\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=\frac{1}{3}\left(2+\frac{2x}{y}+\frac{y}{x}+1\right)\geqslant$

$\frac{1}{3}(3+2\sqrt{2})$，当且仅当 $\frac{2x}{y}=\frac{y}{x}$，即 $y=\sqrt{2}x$ 时，等号成立，所以 $2x+y$ 的最小值为 $\frac{3+2\sqrt{2}}{3}$. **故 A 正确.**

6. AD 【解析】设 $\triangle ABC$ 的外接圆的半径为 R，若 $\sin A>\sin B$，则 $2R\sin A>2R\sin B$，可得 $a>b$，所以 $A>B$，**故 A 正确**；在等边三角形 ABC 中，边长为 2，$B=60°$，所以 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{BC}|\cos(180°-60°)=2\times2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-2$，**故 B 不正确**；若 $a\cos A=b\cos B$，则由正弦定理得 $\sin A\cos A=\sin B\cos B$，即 $\sin 2A=\sin 2B$，可得 $A=B$ 或 $A+B=90°$，所以 $\triangle ABC$ 是等腰三角形或直角三角形，**故 C 不正确**；因为 $BC=a=\sqrt{3}$，BC 边上的中线 $AD=1$，且易知 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$，$2\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}$，故将两式平方相加，整理得 $|\overrightarrow{BC}|^2+4|\overrightarrow{AD}|^2=2(|\overrightarrow{AC}|^2+|\overrightarrow{AB}|^2)$，即 $a^2+4AD^2=2(b^2+c^2)$，可得 $3+4\times1=2(b^2+c^2)$，整理得 $b^2+c^2=\frac{7}{2}$，结合 $b^2+c^2\geqslant 2bc$，可得 $bc\leqslant\frac{7}{4}$，当且仅当 $b=c=\frac{\sqrt{7}}{2}$ 时，bc 取得最大值 $\frac{7}{4}$，**故 D 正确.**

7. C 【解析】对于 A，$\because b-2a+4a\sin^2\frac{A+B}{2}=0$，$\therefore b-2a+4a\cos^2\frac{C}{2}=0$，即 $b-2a+2a(\cos C+1)=0$，$\therefore \cos C=-\frac{b}{2a}<0$，又 $C\in(0,\pi)$，$\therefore C$ 一定为钝角，**故 A 正确**；

对于 B，由余弦定理知，$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=-\frac{b}{2a}$，化简得 $a^2+2b^2-c^2=0$，**故 B 正确**；

对于 D，$\because \frac{\tan A}{\tan C}=\frac{\sin A\cos C}{\cos A\sin C}=\frac{\sin A}{\sin C}\cdot\frac{\cos C}{\cos A}=\frac{a}{c}\cdot\frac{(a^2+b^2-c^2)\cdot 2bc}{2ab\cdot(b^2+c^2-a^2)}=\frac{-b^2}{3b^2}=-\frac{1}{3}$，

$\therefore 3\tan A+\tan C=0$，**故 D 正确**；

对于 C，$\because A+B+C=\pi$，$\therefore \tan B=-\tan(A+$

$C)=-\dfrac{\tan A+\tan C}{1-\tan A\tan C}=-\dfrac{\tan A-3\tan A}{1+\tan A\cdot 3\tan A}=\dfrac{2}{\dfrac{1}{\tan A}+3\tan A}$，$\because C$为钝角，$\therefore A\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，$\tan A>0$，$\therefore \dfrac{1}{\tan A}+3\tan A\geqslant 2\sqrt{\dfrac{1}{\tan A}\cdot 3\tan A}=2\sqrt{3}$，当且仅当$\dfrac{1}{\tan A}=3\tan A$，即$\tan A=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$时，等号成立，此时$\tan B$取得最大值$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，**故 C 错误.**

名师点拨 （1）解三角形的解题思路：利用正弦定理实现“边化角”；利用余弦定理实现“角化边”.

（2）求三角形有关代数式的最值或取值范围主要方法有两种：利用基本不等式或函数思想求解.

8. A 【解析】由题意，$S_{\triangle ADC}=\dfrac{1}{2}AD\cdot AC\cdot\sin\angle DAC=\dfrac{1}{2}\times 4AC\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}$，解得$AC=4$，所以$\triangle ADC$为等腰三角形，则$\angle ADC=\dfrac{\pi}{6}$，故$\angle ADB=\dfrac{5\pi}{6}$，在$\triangle ABD$中，由正弦定理得$\dfrac{AB}{\sin\angle ADB}=\dfrac{BD}{\sin\angle BAD}$，即$\dfrac{2BD}{\dfrac{1}{2}}=\dfrac{BD}{\sin\angle BAD}$，得$\sin\angle BAD=\dfrac{1}{4}$. 因为$\angle ADB=\dfrac{5\pi}{6}$，所以$\angle BAD$为锐角，故$\cos\angle BAD=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$，故$\sin\angle ABD=\sin(\angle ADC-\angle BAD)=\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-\angle BAD\right)=\dfrac{1}{2}\cos\angle BAD-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\angle BAD=\dfrac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{8}$.

故 A 正确.

9. $\dfrac{\pi}{3}$　3 【解析】$\because\sqrt{3}a\cos C=c\sin A$，$\therefore$由正弦定理可得$\sqrt{3}\sin A\cos C=\sin C\sin A$，又$A$，$C\in(0,\pi)$，$\therefore\sin A\neq 0$，$\therefore\sqrt{3}\cos C=\sin C$，即$\tan C=\dfrac{\sin C}{\cos C}=\sqrt{3}$，$\therefore C=\dfrac{\pi}{3}$. 由

余弦定理可得 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$，即 $7=4+b^2-2b$，解得 $b=3$ 或 $b=-1$（舍）.

10.【解】（1）$\because a\sin C=c(2-\sqrt{3}\cos A)$，$\therefore$ 由正弦定理得 $\sin A\sin C=\sin C(2-\sqrt{3}\cos A)$. 又 $\because C\in(0,\pi)$，$\therefore \sin C\neq 0$，$\therefore \sin A=2-\sqrt{3}\cos A$，即 $\sin A+\sqrt{3}\cos A=2$，$\therefore 2\sin\left(A+\dfrac{\pi}{3}\right)=2$，即 $\sin\left(A+\dfrac{\pi}{3}\right)=1$，$\because A\in(0,\pi)$，$\therefore A+\dfrac{\pi}{3}\in\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{4\pi}{3}\right)$，$\therefore A+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}$，$\therefore A=\dfrac{\pi}{6}$.

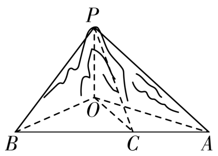
（2）$\because a^2-b^2=c^2-6c$，$\therefore a^2=b^2+c^2-6c$，$\therefore \cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{6c}{2bc}=\dfrac{3}{b}$，$\therefore \dfrac{3}{b}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\therefore b=2\sqrt{3}$. 又 $\because S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=4\sqrt{3}$，$\therefore \dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{3}\times c\times\dfrac{1}{2}=4\sqrt{3}$，$\therefore c=8$，$\therefore a=\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos A}=\sqrt{12+64-2\times 2\sqrt{3}\times 8\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=2\sqrt{7}$.

11.【解】（1）由题意知 $BD=CD=\dfrac{3}{2}$，在 $\triangle ADB$ 中，由余弦定理可得，$\cos A=\dfrac{AD^2+AB^2-BD^2}{2AD\cdot AB}=\dfrac{4}{5}$，整理得 $20AD^2-64AD+35=0$，即 $(2AD-5)(10AD-7)=0$，所以 $AD=\dfrac{5}{2}$ 或 $AD=\dfrac{7}{10}$.

（2）因为 $AD>AB$，由（1）得 $AD=\dfrac{5}{2}$，所以 $AC=AD+DC=4$，在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理得 $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos A=4+16-2\times2\times4\times\dfrac{4}{5}=\dfrac{36}{5}$，所以 $BC=\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$，由 $\cos A=\dfrac{4}{5}$，$A\in(0,\pi)$，得 $\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\dfrac{3}{5}$. 在 $\triangle ABC$ 中，由正弦定理得 $\dfrac{BC}{\sin A}=\dfrac{AB}{\sin\angle ACB}$，则 $\dfrac{\frac{6\sqrt{5}}{5}}{\frac{3}{5}}=\dfrac{2}{\sin\angle ACB}$，所以 $\sin\angle ACB=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

12.【解】(1)设 $OP=x$ km,在$\triangle PAO$中,因为 $\tan\angle PAO=\frac{PO}{AO}$,所以 $AO=\frac{x}{\tan 30^\circ}=\sqrt{3}x$. 同理,在$\triangle PBO$中,$BO=\frac{x}{\tan 45^\circ}=x$. 在$\triangle AOB$中,由余弦定理得 $AB^2=AO^2+BO^2-2AO\cdot BO\cos\angle AOB=6x^2$,所以 $AB=\sqrt{6}x=60\times\frac{3}{60}=3$,解得 $x=\frac{\sqrt{6}}{2}$,所以此山的高 OP 为$\frac{\sqrt{6}}{2}$ km.

(2)由(1)及题意得 $BO=\frac{\sqrt{6}}{2}$,$AO=\frac{3\sqrt{2}}{2}$,$AB=3$,$\sin\angle AOB=\frac{\sqrt{6}}{3}$. 设 C 是线段 AB 上一动点,如图,连接 OC,PC,则在点 C 处观测 P 点的仰角为 $\angle PCO$,



$\tan\angle PCO=\frac{OP}{OC}=\frac{\sqrt{6}}{2OC}$. 当 $OC\perp AB$ 时,OC 最短,此时由 $S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}AO\cdot BO\sin\angle AOB=\frac{1}{2}AB\cdot OC$ 得 $OC=\frac{\sqrt{2}}{2}$,所以 $\tan\angle PCO=\frac{\sqrt{6}}{2OC}\leqslant\sqrt{3}$ $\left(当且仅当 OC=\frac{\sqrt{2}}{2}时等号成立\right)$,所以该车从 A 到 B 行驶过程中观测 P 点的仰角正切值的最大值为$\sqrt{3}$.

13.【解】(1)由 $\frac{a}{b}=\frac{\cos A}{2-\cos B}$,得 $2a-a\cos B=b\cos A$,由正弦定理和两角和的正弦展开式,得 $2\sin A=\sin A\cos B+\sin B\cos A=\sin(A+B)=\sin C$,所以 $\frac{a}{c}=\frac{\sin A}{\sin C}=\frac{1}{2}$.

(2)由 $\sin^2C+\cos^2C=1$,且 $\cos C=\frac{1}{4}$,$\sin C>0$,解得 $\sin C=\frac{\sqrt{15}}{4}$,因为 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\sqrt{15}$,所以 $ab=8$. 又由余弦定理

和 $c=2a$，可得 $\begin{cases}\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{1}{4},\\ c=2a,\end{cases}$ 解得

$b^2-3a^2=4$. 将 $b=\dfrac{8}{a}$ 代入上式可得 $(3a^2+16)(a^2-4)=0$，解得 $a=2$，所以 $b=c=4$，$\triangle ABC$ 的周长为 $a+b+c=10$.

(3) $\cos\left(2B+\dfrac{\pi}{6}\right)=\cos 2B\cos\dfrac{\pi}{6}-\sin 2B\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos 2B-\dfrac{1}{2}\sin 2B=\sqrt{3}\cos^2B-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\sin B\cos B$①，由(2)知，在等腰三角形 ABC 中，$b=c=4$，$a=2$，所以 $\cos B=\cos C=\dfrac{1}{4}$，$\sin B=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$，代入①得 $\cos\left(2B+\dfrac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}\times\dfrac{1}{16}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\sqrt{15}}{4}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{-7\sqrt{3}-\sqrt{15}}{16}$.

专题上分 3　正弦定理、余弦定理的应用

1. D　【解析】在 $\triangle ABC$ 中，由 $c\cos A-\sqrt{3}c\sin A-b+2a=0$ 及正弦定理，得 $\sin C\cos A-\sqrt{3}\sin C\sin A-\sin B+2\sin A=0$，

而 $\sin B=\sin(A+C)=\sin A\cos C+\cos A\sin C$，

则 $\sqrt{3}\sin C\sin A+\cos C\sin A=2\sin A$，

而 $\sin A>0$，整理得 $\sin\left(C+\dfrac{\pi}{6}\right)=1$，

又 $0<C<\pi$，解得 $C=\dfrac{\pi}{3}$，

由余弦定理 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$，得 $9=a^2+b^2-ab=(a+b)^2-3ab\geqslant(a+b)^2-3\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}(a+b)^2$，

解得 $a+b\leqslant 6$，当且仅当 $a=b=3$ 时取等号，

所以 $\triangle ABC$ 周长的最大值为 9. **故 D 正确.**

2. $4+2\sqrt{3}$　【解析】在 $\triangle ABC$ 中，已知 $a\cos B-\dfrac{1}{2}b=c$，由正弦定理得 $\sin A\cos B-\dfrac{1}{2}\sin B=\sin C$.

因为 $A+B+C=\pi$，所以 $\sin C=\sin[\pi-(A+B)]=\sin(A+B)$，

则 $\sin A\cos B-\dfrac{1}{2}\sin B=\sin A\cos B+\cos A\sin B$，得 $-\dfrac{1}{2}\sin B=\cos A\sin B$.

因为 $B\in(0,\pi)$，所以 $\sin B\neq 0$，两边同时除以 $\sin B$ 可得 $\cos A=-\dfrac{1}{2}$，

又因为 $A\in(0,\pi)$，所以 $A=\dfrac{2\pi}{3}$.

已知 $\triangle ABC$ 的外接圆直径为 4，即 $2R=4$（R 为外接圆半径），

由正弦定理可得 $a=2R\sin A=4\times\sin\dfrac{2\pi}{3}=4\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$，

$b=2R\sin B=4\sin B$，$c=2R\sin C=4\sin C$.

且 $C=\pi-A-B=\dfrac{\pi}{3}-B$，

则 $\triangle ABC$ 的周长 $L=a+b+c=2\sqrt{3}+4\sin B+4\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-B\right)$.

所以 $L=2\sqrt{3}+4\sin B+4\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos B-\dfrac{1}{2}\sin B\right)=2\sqrt{3}+4\sin B+2\sqrt{3}\cos B-2\sin B=2\sqrt{3}+2\sin B+2\sqrt{3}\cos B=2\sqrt{3}+4\sin\left(B+\dfrac{\pi}{3}\right)$，

因为 $B\in\left(0,\dfrac{\pi}{3}\right)$，

所以 $B+\dfrac{\pi}{3}\in\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{2\pi}{3}\right)$，

当 $B+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}$，即 $B=\dfrac{\pi}{6}$ 时，$\sin\left(B+\dfrac{\pi}{3}\right)$ 取得最大值 1，

所以 $\triangle ABC$ 周长的最大值为 $2\sqrt{3}+4\times1=4+2\sqrt{3}$.

3.【解】（1）$f(x)=2\sin\dfrac{x}{2}\left(\cos\dfrac{x}{2}-\sin\dfrac{x}{2}\right)+2m-m=\sin x+\cos x-1+m=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)-1+m.$

$\because x \in \left[\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{2\pi}{3}\right)$, $\therefore x+\dfrac{\pi}{4} \in \left[\dfrac{5\pi}{12}, \dfrac{11\pi}{12}\right)$, ∴ 当 $x+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$, 即 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 时, 函数 $f(x)$ 取得最大值 $\sqrt{2}+m-1=\sqrt{2}$, $\therefore m=1$.

(2) 由 (1) 知 $f(x)=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$,

$\therefore f\left(B+\dfrac{3\pi}{4}\right)=-\dfrac{\sqrt{6}}{2}=\sqrt{2}\sin(B+\pi)=-\sqrt{2}\sin B$, $\therefore \sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. $\because B$ 为锐角, $\therefore B=\dfrac{\pi}{3}$. 由余弦定理得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=a^2+c^2-ac=(a+c)^2-3ac \geqslant (a+c)^2-\dfrac{3(a+c)^2}{4}=\dfrac{1}{4}(a+c)^2$, 而 $b=2$, $\therefore 4 \geqslant \dfrac{1}{4}(a+c)^2$, 即 $a+c \leqslant 4$, 当且仅当 $a=c=2$ 时, 等号成立, 又 $2=b<a+c$, $\therefore 2<a+c\leqslant 4$, 故 $\triangle ABC$ 的周长 $l=a+b+c \in (4, 6]$.

4. B

攻略上分 本题可转化为已知三角形中一个角及其对边求三角形的面积最大值问题,符合通法攻略 15 中的类型一,除常规解法外,还可利用“补圆术”速解本题.

【解析】 $\because \sin^2 B+\sin^2 C-\sin^2 A=\sin B\sin C$, ∴ 由正弦定理得 $b^2+c^2-a^2=bc$, 再由余弦定理得 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{1}{2}$. 又 $A \in (0, \pi)$, $\therefore A=\dfrac{\pi}{3}$. $\because a=2$, 由余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$, $\therefore 4=b^2+c^2-bc \geqslant bc$, 当且仅当 $b=c=2$ 时等号成立, $\therefore bc \leqslant 4$, 则 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{4}bc \leqslant \sqrt{3}$, $\therefore \triangle ABC$ 面积的最大值为 $\sqrt{3}$. **故 B 正确.**

一题多解 $\because \sin^2B+\sin^2C-\sin^2A=\sin B\sin C$，$\therefore$ 由正弦定理得 $b^2+c^2-a^2=bc$，再由余弦定理得 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1}{2}$. 又 $A\in(0,\pi)$，$\therefore A=\frac{\pi}{3}$. $\because a=2$，根据通法攻略 15 可得当三角形为等边三角形时，三角形的面积最大，此时 $S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}a\cdot a=\sqrt{3}$，$\therefore \triangle ABC$ 的面积的最大值为 $\sqrt{3}$. 故 B 正确.

5\. $\frac{9\sqrt{3}}{4}$

思路导引 根据给定条件，利用正弦定理建立方程，利用两角和的正弦公式展开得 $\cos\angle ADB=0$，进而求得 $\angle ADB=\frac{\pi}{2}$. 设 $\angle BAC=\theta$ 并结合正弦定理表示出 BC，CD，再利用三角形面积公式，结合二次函数的性质求出所求最大值.

【解析】在 $\triangle ABD$ 中，$\angle DBA=\frac{\pi}{6}$，$2BD=\sqrt{3}AB$，

由正弦定理得 $\frac{AB}{\sin\angle ADB}=\frac{BD}{\sin\angle BAD}=\frac{BD}{\sin\left(\frac{\pi}{6}+\angle ADB\right)}$，

所以 $\frac{\sin\angle ADB}{\sin\left(\frac{\pi}{6}+\angle ADB\right)}=\frac{2}{\sqrt{3}}$，

所以 $\sqrt{3}\sin\angle ADB=2\sin\left(\frac{\pi}{6}+\angle ADB\right)=\cos\angle ADB+\sqrt{3}\sin\angle ADB$，

所以 $\cos\angle ADB=0$，因为 $\angle ADB\in\left(0,\frac{5\pi}{6}\right)$，所以 $\angle ADB=\frac{\pi}{2}$，

所以 AB 是四边形 $ABCD$ 外接圆的直径，

故 $\angle ACB=\frac{\pi}{2}$.

提示：直径所对的圆周角是直角

设 $\angle BAC=\theta$，$0<\theta<\frac{\pi}{3}$，则 $BC=AC\tan\theta=$

$2\sqrt{6}\tan\theta$,

提示：直角三角形中三角函数的定义

在$\triangle ACD$中，$\angle CAD=\frac{\pi}{3}-\theta$，$\angle ADC=\pi-\angle ABC=\frac{\pi}{2}+\theta$，

由正弦定理得$\frac{CD}{\sin\angle CAD}=\frac{AC}{\sin\angle ADC}$，

即 $CD=\frac{2\sqrt{6}\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}=\frac{2\sqrt{6}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta-\frac{1}{2}\sin\theta\right)}{\cos\theta}=\sqrt{6}(\sqrt{3}-\tan\theta)$，

在$\triangle BCD$中，$\angle BCD=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$，

所以 $S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}BC\cdot CD\sin\angle BCD=\frac{\sqrt{3}}{4}\times 2\sqrt{6}\tan\theta\times\sqrt{6}(\sqrt{3}-\tan\theta)$

$=3\sqrt{3}(\sqrt{3}\tan\theta-\tan^2\theta)$

$=3\sqrt{3}\left[\frac{3}{4}-\left(\tan\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right]\leqslant\frac{9\sqrt{3}}{4}$，

提示：配方，利用二次函数的性质求最值

当且仅当 $\tan\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时取等号，所以$\triangle BCD$面积的最大值为$\frac{9\sqrt{3}}{4}$.

6. **思路导引** （1）将边化为角，结合两角和的正弦公式化简即可.
（2）若选①，则由正弦定理将边化成角，结合三角恒等变换及三角函数图象可求范围；若选②，则由正弦定理将边化成角，结合正切函数的图象即可求解范围.

【解】（1）$\because 2b\cos A=a\cos C+c\cos A\Rightarrow 2\sin B\cos A=\sin A\cos C+\sin C\cos A\Rightarrow 2\sin B\cos A=\sin(A+C)\Rightarrow 2\sin B\cos A=\sin B$，

又 $B\in(0,\pi)$，$\therefore \sin B\neq 0$，$\cos A=\frac{1}{2}$，

$\because A\in(0,\pi)$，$\therefore A=\frac{\pi}{3}$.

（2）若选①$a=2$.

由正弦定理可知 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$,

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{\sqrt{3}}{4}bc=\frac{4\sqrt{3}}{3}\sin B\sin C=\frac{4\sqrt{3}}{3}\sin B\sin\left(\frac{2\pi}{3}-B\right)=\frac{4\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sin B\cos B+\frac{1}{2}\sin^2 B\right)=\frac{4\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\sin 2B+\frac{1-\cos 2B}{4}\right)=\frac{4\sqrt{3}}{3}\left[\frac{1}{2}\sin\left(2B-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{4}\right]=\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\left(2B-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\sqrt{3}}{3}$,

又 $\triangle ABC$ 为锐角三角形,

$\therefore\begin{cases}B\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right),\\ C=\frac{2\pi}{3}-B\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right),\end{cases}$

得 $B\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$,

$\therefore 2B-\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$,

$\sin\left(2B-\frac{\pi}{6}\right)\in\left(\frac{1}{2},1\right]$,

故 $S_{\triangle ABC}\in\left(\frac{2\sqrt{3}}{3},\sqrt{3}\right]$.

若选②$b=2$.

由正弦定理可知 $c=\frac{2\sin C}{\sin B}=\frac{2\sin\left(\frac{2\pi}{3}-B\right)}{\sin B}$,

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}c=\frac{\sqrt{3}\sin\left(\frac{2}{3}\pi-B\right)}{\sin B}=\frac{3}{2\tan B}+\frac{\sqrt{3}}{2}$,

又 $\triangle ABC$ 为锐角三角形,

$\therefore\begin{cases}B\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right),\\ C=\frac{2\pi}{3}-B\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right),\end{cases}$ 得 $B\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$, $\therefore \tan B>\frac{\sqrt{3}}{3}$,

故 $S_{\triangle ABC}\in\left(\frac{\sqrt{3}}{2},2\sqrt{3}\right)$.

7. A 【解析】因为 $c\tan B=(2a-c)\cdot\tan C$,

由正弦定理得 $\frac{\sin C\sin B}{\cos B}=\frac{(2\sin A-\sin C)\sin C}{\cos C}$，由 $\sin C>0$，得 $\sin B\cos C=2\sin A\cos B-\sin C\cos B$，所以 $\sin B\cos C+\cos B\sin C=2\sin A\cos B$，即 $\sin(B+C)=2\sin A\cos B$. 因为 $B+C+A=\pi$，所以 $\sin A=2\sin A\cos B$. 又 $\sin A>0$，所以 $\cos B=\frac{1}{2}$. 因为 $0<B<\pi$，所以 $B=\frac{\pi}{3}$，由 $S_{\triangle ABD}+S_{\triangle CBD}=S_{\triangle ABC}$，得 $\frac{1}{2}AB\cdot BD\cdot\sin\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}BC\cdot BD\cdot\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}AB\cdot BC\cdot\sin\frac{\pi}{3}$，所以 $BD=\frac{\sqrt{3}AB\cdot BC}{AB+BC}$. 在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理得 $AB^2+BC^2-AB\cdot BC=12$，所以 $AB\cdot BC=\frac{(AB+BC)^2-12}{3}\leqslant\frac{(AB+BC)^2}{4}$，从而 $AB+BC\leqslant 4\sqrt{3}$，当且仅当 $AB=BC$ 时取等号，则 $BD=\frac{\sqrt{3}\times\frac{(AB+BC)^2-12}{3}}{AB+BC}=\frac{\sqrt{3}}{3}(AB+BC)-\frac{4\sqrt{3}}{AB+BC}\leqslant 3$，当且仅当 $AB=BC=2\sqrt{3}$ 时取等号，则 BD 的最大值为 3. **故 A 正确.**

8. $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}$ 【解析】因为 A 为锐角，$b=\sqrt{3}a\sin B$，所以由正弦定理可得 $\sin B=\sqrt{3}\sin A\sin B$. 在 $\triangle ABC$ 中，$\sin B>0$，所以 $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{3}$，可得 $\cos A=\frac{\sqrt{6}}{3}$，由等面积法可得 $\frac{1}{2}ah=\frac{1}{2}bc\sin A$，可得 $h=\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}bc}{a}$，则 $\frac{h}{a}=\frac{\sqrt{3}bc}{3a^2}=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{bc}{b^2+c^2-2bc\cos A}\leqslant\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{bc}{2bc-\frac{2\sqrt{6}}{3}bc}=\frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{3}{6-2\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}$，当且仅当 $b=c$ 时取等号，所以 $\frac{h}{a}$ 的最大值为 $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}$.

9.【解】(1) 在 $\triangle ABC$ 中，由 $c=b\cos A+\frac{1}{2}a$ 及余弦定理，可得 $c=b\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{1}{2}a$，整理得 $c^2+a^2-b^2=ac$，于是 $\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ac}=\frac{1}{2}$，而 $0<B<\pi$，所以 $B=\frac{\pi}{3}$.

(2) 选①，BD 是边 AC 上的高，$BD=1$，由三角形面积公式得 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin\angle ABC=\frac{1}{2}b\cdot BD$，即 $b=\frac{\sqrt{3}}{2}ac$，由 (1) 知，$b^2=a^2+c^2-ac\geqslant ac$，当且仅当 $a=c$ 时取等号，因此 $b^2\geqslant\frac{2\sqrt{3}}{3}b$，解得 $b\geqslant\frac{2\sqrt{3}}{3}$，所以当 $a=c=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 时，b 取得最小值 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

选②，BD 是边 AC 上的中线，则 $\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})$，两边平方得 $4\overrightarrow{BD}^2=\overrightarrow{BA}^2+\overrightarrow{BC}^2+2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$，即 $4=c^2+a^2+2ca\cos\frac{\pi}{3}=c^2+a^2+ca\geqslant 3ac$，当且仅当 $a=c$ 时取等号，于是 $ac\leqslant\frac{4}{3}$，由 (1) 知，$b^2=a^2+c^2-ac=4-2ac\geqslant\frac{4}{3}$，解得 $b\geqslant\frac{2\sqrt{3}}{3}$，所以当 $a=c=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 时，b 取得最小值 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

选③，BD 是角 B 的平分线，由三角形面积公式，得 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle CBD}$，即 $\frac{1}{2}ac\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}c\sin\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}a\sin\frac{\pi}{6}$，整理得 $\sqrt{3}ac=a+c\geqslant 2\sqrt{ac}$，当且仅当 $a=c$ 时取等号，故 $ac\geqslant\frac{4}{3}$，由 (1) 知，$b^2=a^2+c^2-ac\geqslant ac\geqslant\frac{4}{3}$，当且仅当 $a=c$ 时取等号，解得 $b\geqslant\frac{2\sqrt{3}}{3}$，所以当 $a=c=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 时，b 取得最小值 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

10.【解】(1) $\because 4\sqrt{3}S+3(b^2-a^2)=3c^2$，

$\therefore 4\sqrt{3}\times\frac{1}{2}ac\sin B=3c^2-3(b^2-a^2)=3(a^2+c^2-b^2)$，即 $2\sqrt{3}ac\sin B=3\times 2ac\cos B$，

$\therefore \tan B=\sqrt{3}$. $\because B\in(0,\pi)$, $\therefore B=\dfrac{\pi}{3}$. 又

$\because b=2$, $\therefore 2R=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$,

$\therefore R=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

$\therefore$ $\triangle ABC$ 外接圆的半径 R 为$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

(2) 由(1)可知, $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{2\sqrt{3}b}{3}$, $\therefore a=\dfrac{2\sqrt{3}b}{3}\sin A$, $c=\dfrac{2\sqrt{3}b}{3}\sin C$,

$\therefore a^2=\dfrac{4b^2}{3}\sin^2 A$, $c^2=\dfrac{4b^2}{3}\sin^2 C$, $\therefore \dfrac{a^2+b^2}{c^2}=\dfrac{\frac{4b^2}{3}\sin^2 A+b^2}{\frac{4b^2}{3}\sin^2 C}=\dfrac{4\sin^2\left(C+\frac{\pi}{3}\right)+3}{4\sin^2 C}=\dfrac{4\left(\frac{1}{2}\sin C+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos C\right)^2+3}{4\sin^2 C}=\dfrac{4\sin^2 C+2\sqrt{3}\sin C\cos C+6\cos^2 C}{4\sin^2 C}=1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{1}{\tan C}+\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{1}{\tan^2 C}$.

$\because$ $\triangle ABC$ 为锐角三角形, $B=\dfrac{\pi}{3}$, $\therefore 0<C<\dfrac{\pi}{2}$, $0<\dfrac{2\pi}{3}-C<\dfrac{\pi}{2}$, $\therefore \dfrac{\pi}{6}<C<\dfrac{\pi}{2}$, $\therefore \tan C>\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $\therefore 0<\dfrac{1}{\tan C}<\sqrt{3}$. 设 $t=\dfrac{1}{\tan C}$, 则 $\dfrac{a^2+b^2}{c^2}=\dfrac{3}{2}t^2+\dfrac{\sqrt{3}}{2}t+1=\dfrac{3}{2}\left(t+\dfrac{\sqrt{3}}{6}\right)^2+\dfrac{7}{8}$,

$\because 0<t<\sqrt{3}$, $\therefore \dfrac{a^2+b^2}{c^2}\in(1,7)$.

$\therefore \dfrac{a^2+b^2}{c^2}$的取值范围为$(1,7)$.

11.【解】(1) 因为 $2c\sin B\cos A=b\sin B-a\sin A+a\sin C$, 由正弦定理得 $2bc\cos A=b^2-a^2+ac$, 由余弦定理得 $2bc\cdot\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=b^2-a^2+ac$, 所以 $c^2=ac$, 故 $a=c=4$, 即 $AB=4$.

(2) 设 $\overrightarrow{BM}=x\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BN}=y\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BH}=\lambda\overrightarrow{BD}$, 因为 $S_{\triangle BMN}=\dfrac{1}{4}S_{\triangle ABC}$, 所以 $\dfrac{1}{2}BM\cdot BN\cdot$

$\sin\angle ABC=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}BA\cdot BC\cdot\sin\angle ABC$，即 $xBA\cdot yBC=\frac{1}{4}BA\cdot BC$，即 $xy=\frac{1}{4}$①.

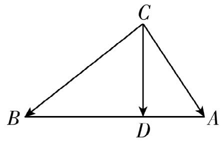
因为 $\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})$，所以 $\overrightarrow{BH}=\lambda\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}\lambda(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})=\frac{1}{2}\lambda\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\lambda\overrightarrow{BC}$，且存在实数 μ，使 $\overrightarrow{BH}=\mu\overrightarrow{BM}+(1-\mu)\overrightarrow{BN}=\mu x\overrightarrow{BA}+(1-\mu)y\overrightarrow{BC}$，即 $\begin{cases}\frac{1}{2}\lambda=\mu x,\\ \frac{1}{2}\lambda=(1-\mu)y,\end{cases}$ 整理有 $\begin{cases}\mu=\frac{\lambda}{2x},\\ 1-\mu=\frac{\lambda}{2y},\end{cases}$ 解得 $\lambda=\frac{2xy}{x+y}$②，由①②得 $\lambda=\frac{1}{2(x+y)}$.

因为 $\overrightarrow{BH}=\lambda\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2(x+y)}\cdot(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})$，$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{BN}-\overrightarrow{BM}=y\overrightarrow{BC}-x\overrightarrow{BA}$，

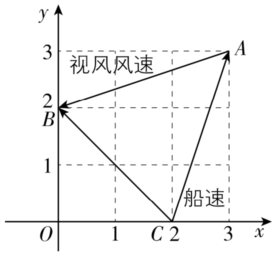
所以 $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{MN}=\frac{1}{4(x+y)}\cdot(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})\cdot(y\overrightarrow{BC}-x\overrightarrow{BA})=\frac{1}{4(x+y)}[y\overrightarrow{BC}^2-x\overrightarrow{BA}^2+(-x+y)\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}]=\frac{1}{4(x+y)}\left[16y-16x+(y-x)\times4\times4\times\frac{1}{2}\right]=6\left(\frac{2}{4x^2+1}-1\right)$，又易知 $\begin{cases}0<x\leqslant1,\\ 0<y=\frac{1}{4x}\leqslant1,\end{cases}$ 且两个等号不能同时成立，整理得 $\frac{1}{4}\leqslant x\leqslant1$，$f(x)=6\left(\frac{2}{4x^2+1}-1\right)$ 在 $\left[\frac{1}{4},1\right]$ 上单调递减，因此当 $x=1$ 时，$\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{MN}$ 有最小值，$(\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{MN})_{\min}=-\frac{18}{5}$.

真题上分

1. B 【解析】如图，因为点 D 在边 AB 上，$BD=2DA$，所以 $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CA}+3\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CA}+3(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CA})=-2\overrightarrow{CA}+3\overrightarrow{CD}=-2\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n}$，**故选** B.



2. A 【解析】如图,设点 $A(3,3)$,$B(0,2)$,$C(2,0)$,由题意知,视风风速对应的向量为 $\overrightarrow{AB}$,船速对应的向量为 $\overrightarrow{CA}$,因为船行风风速对应的向量与船速对应的向量为相反向量,所以船行风风速对应的向量为 $\overrightarrow{AC}$,则真风风速对应的向量为 $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}=(-2,2)$,$|\overrightarrow{CB}|=\sqrt{(-2)^2+2^2}=2\sqrt{2}$,而 $2\sqrt{2}\in(1.6,3.3)$,故该时刻的真风为轻风. **故选 A.**



3. D 【解析】$\because|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=\sqrt{2}$,$|\overrightarrow{AB}|=2$,$\therefore|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OB}|^2=|\overrightarrow{AB}|^2=4$,$\therefore OA\perp OB$ 且点 A,B 在以点 O 为圆心,$\sqrt{2}$ 为半径的圆上,$\therefore|2\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}|=|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}|=|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-2\overrightarrow{OC}|$,

$\therefore|2\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}|^2=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})^2+4\overrightarrow{OC}^2-4(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}^2+\overrightarrow{OB}^2+4\overrightarrow{OC}^2-4(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\cdot\overrightarrow{OC}=104-4(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\cdot\overrightarrow{OC}$.

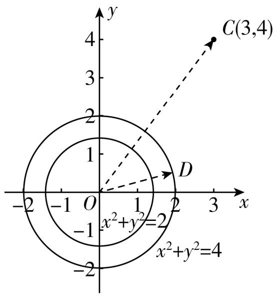
令 $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$,则点 D 在以点 O 为圆心,2 为半径的圆上,

$\therefore(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{OC}=|\overrightarrow{OD}|\cdot|\overrightarrow{OC}|\cos\langle\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OC}\rangle=10\cos\langle\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OC}\rangle$.

$\because\langle\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OC}\rangle\in[0,\pi]$,$\therefore(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\cdot\overrightarrow{OC}\in[-10,10]$,

$\therefore|2\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}|^2=104-4(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\cdot\overrightarrow{OC}\in[64,144]$,

$\therefore|2\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}|\in[8,12]$. **故选 D.**

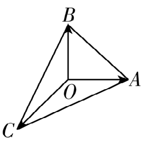


4. D 【解析】由题意知 $\boldsymbol{b}-4\boldsymbol{a}=(2,x)-4(0,1)=(2,x-4)$，又 $\boldsymbol{b}\perp(\boldsymbol{b}-4\boldsymbol{a})$，所以 $2\times2+x(x-4)=0$，即 $x^2-4x+4=0$，解得 $x=2$，**故选** D.

一题多解 因为 $\boldsymbol{b}\perp(\boldsymbol{b}-4\boldsymbol{a})$，所以 $\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{b}-4\boldsymbol{a})=\boldsymbol{b}^2-4\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}=0$. 又 $\boldsymbol{a}=(0,1)$，$\boldsymbol{b}=(2,x)$，所以 $\boldsymbol{b}^2=4+x^2$，$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}=0\times2+x=x$，所以 $4+x^2-4x=0$，解得 $x=2$. **故选** D.

5. C 【解析】由题可得 $\boldsymbol{a}=(x+1,x)$，$\boldsymbol{b}=(x,2)$，$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 的充要条件为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，即 $(x+1)\cdot x+2x=0$，解得 $x=0$ 或 $x=-3$，**故** A **错误**，C **正确**. $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 的充要条件为 $2(x+1)=x^2$，即 $x^2-2x-2=0$，解得 $x=1\pm\sqrt{3}$，**故** B，D **错误**. **故选** C.

6. D 【解析】设 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$，因为 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=1$，$|\boldsymbol{c}|=\sqrt{2}$，且 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，所以 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，如图.



因为 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{CA}$，$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{CB}$，所以 $\langle\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}\rangle=\angle ACB$.

由题意可知，$\angle AOC=\angle BOC=\dfrac{3\pi}{4}$，在 $\triangle AOC$ 中，由余弦定理得，$AC^2=OA^2+OC^2-2OA\cdot OC\cdot\cos\angle AOC=1^2+(\sqrt{2})^2-2\times1\times\sqrt{2}\times\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=5$，所以 $AC=BC=\sqrt{5}$. 在 $\triangle ABC$ 中，$AB=\sqrt{2}$，由余弦定理得，$\cos\angle ACB=\dfrac{AC^2+BC^2-AB^2}{2AC\cdot BC}=\dfrac{(\sqrt{5})^2+(\sqrt{5})^2-(\sqrt{2})^2}{2\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\dfrac{4}{5}$，所以 $\cos\langle\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}\rangle=\dfrac{4}{5}$，**故选** D.

一题多解 因为 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=1$，$|\boldsymbol{c}|=\sqrt{2}$，且 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，所以 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，设 $\boldsymbol{a}=(1,0)$，$\boldsymbol{b}=(0,1)$，则 $\boldsymbol{c}=(-1,-1)$，则 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}=(2,1)$，$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}=(1,2)$，所以 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=2\times1+1\times2=4$，又 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}|=\sqrt{5}$，$|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}|=\sqrt{5}$，所以 $\cos\langle\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}\rangle=\dfrac{(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})}{|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}||\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}|}=\dfrac{4}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\dfrac{4}{5}$，**故选** D.

7. A 【解析】直线 PA 与 $\odot O$ 相切于 A，且 $|OA|=1$，$|PO|=\sqrt{2}$，则 $|PA|=1$. 设 $\overrightarrow{PO}$ 与 $\overrightarrow{PD}$ 的夹角为 θ，则 $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right)$.

当 PA 与 PD 在 PO 的同侧时，$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PD}=|\overrightarrow{PA}||\overrightarrow{PD}|\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)=1\times|PO|\cos\theta\times\cos\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)=\sqrt{2}\cos\theta\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)=\sqrt{2}\cos\theta\times\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\theta+\sin\theta)=\cos^2\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{4}\right)\leqslant\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}$;

提示：$\theta\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right)$，$2\theta+\frac{\pi}{4}\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$，则 $\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{4}\right)\in\left[\frac{\sqrt{2}}{2},1\right]$

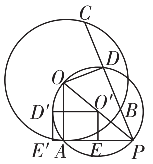
当 PA 与 PD 在 PO 的异侧时，$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PD}=|\overrightarrow{PA}||\overrightarrow{PD}|\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)=1\times|PO|\cos\theta\times\cos\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)=\sqrt{2}\cos\theta\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)=\sqrt{2}\cos\theta\times\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\theta-\sin\theta)=\cos^2\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(2\theta+\frac{\pi}{4}\right)\leqslant\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$.

提示：$\theta\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right)$，$2\theta+\frac{\pi}{4}\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$，$\cos\left(2\theta+\frac{\pi}{4}\right)\in\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

综上所述，$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PD}$ 的最大值为 $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}$，

故选 A.

一题多解 由题知点 D 为弦 BC 的中点，如图，所以 $OD\perp BC$，点 D 在以 OP 为直径的圆上运动，且在圆 O 内，所以 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PD}$ 的最大值为 $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}$，**故选 A.**



8. $\sqrt{2}$ 【解析】由题意得 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(1,1-2x)$，由 $\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$，得 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=0$，即 $x+1-2x=0$，所以 $x=1$，所以 $\boldsymbol{a}=(1,1)$，故 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{2}$.

一题多解 由 $\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$，得 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=0$，即 $\boldsymbol{a}^2=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，将 $\boldsymbol{a}=(x,1)$，$\boldsymbol{b}=(x-1,2x)$ 代入，得 $x^2+1=x(x-1)+2x$，解得 $x=1$，所以 $\boldsymbol{a}=(1,1)$，故 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{2}$.

9. $\sqrt{3}$ 【解析】$\begin{cases}|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{3},\\ |\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|,\end{cases}$ 两式分别平方，得

$$\begin{cases}|\boldsymbol{a}|^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2=3,\\ |\boldsymbol{a}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2=4|\boldsymbol{a}|^2-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2,\end{cases}$$

解得 $|\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}$.

10. A 【解析】根据余弦定理有 $\cos A=\dfrac{AB^2+AC^2-BC^2}{2\cdot AB\cdot AC}=\dfrac{6+4+2\sqrt{3}-4}{2\sqrt{6}(1+\sqrt{3})}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，因为 $0°<A<180°$，所以 $A=45°$. **故选 A.**

11. C 【解析】$\because b^2=\dfrac{9}{4}ac$，$\therefore$ 由正弦定理可得 $\sin^2 B=\dfrac{9}{4}\sin A\sin C$. $\because B=60°$，

$\therefore \sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\therefore \dfrac{3}{4}=\dfrac{9}{4}\sin A\sin C$，

$\therefore \sin A\sin C=\dfrac{1}{3}$.

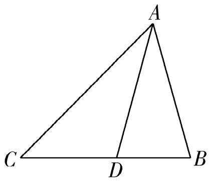
由余弦定理可得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=a^2+c^2-ac$，将 $b^2=\dfrac{9}{4}ac$ 代入整理得，$a^2+c^2=\dfrac{13}{4}ac$，$\therefore$ 由正弦定理得 $\sin^2 A+\sin^2 C=\dfrac{13}{4}\sin A\sin C$，则 $(\sin A+\sin C)^2=\sin^2 A+\sin^2 C+2\sin A\sin C=\dfrac{13}{4}\sin A\sin C+2\sin A\sin C=\dfrac{21}{4}\sin A\sin C=\dfrac{21}{4}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{7}{4}$，

$\therefore \sin A+\sin C=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$ 或 $-\dfrac{\sqrt{7}}{2}$（舍）. **故选 C.**

12. 2 【解析】方法一：如图，在 $\triangle ABC$ 中，由正弦定理得 $\dfrac{AB}{\sin C}=\dfrac{BC}{\sin 60°}$，则 $\sin C=\dfrac{AB\sin 60°}{BC}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，又 $\angle BAC=60°$，所以 $0<$

$C<120°$，所以 $C=45°$. 所以 $B=180°-C-\angle BAC=180°-45°-60°=75°$. 又 AD 平分 $\angle BAC$，所以 $\angle BAD=\dfrac{1}{2}\angle BAC=30°$，所以 $\angle ADB=180°-B-\angle BAD=75°=B$，

故 $\triangle ABD$ 为等腰三角形，所以 $AB=AD=2$.



方法二：设 $AD=x$，$AC=y$，在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理可得 $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cos\angle BAC$，即 $y^2-2y-2=0$，解得 $y=1+\sqrt{3}$（舍负），又 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ADB}+S_{\triangle ADC}$，所以 $\dfrac{1}{2}\times2\times(1+\sqrt{3})\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{1}{2}\times2x\cdot\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\times(1+\sqrt{3})x\cdot\dfrac{1}{2}$，解得 $x=2$.

方法三：在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理得 $\cos\angle BAC=\dfrac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}=\dfrac{4+AC^2-6}{4AC}=\dfrac{1}{2}$，所以 $AC=1+\sqrt{3}$（舍负）. 在 $\triangle ABD$ 中，由正弦定理得 $\dfrac{BD}{\sin\angle BAD}=\dfrac{AB}{\sin\angle ADB}$，所以 $\dfrac{\sin\angle ADB}{\sin\angle BAD}=\dfrac{AB}{BD}$. 在 $\triangle ACD$ 中，由正弦定理得 $\dfrac{CD}{\sin\angle CAD}=\dfrac{AC}{\sin\angle ADC}$，所以 $\dfrac{\sin\angle ADC}{\sin\angle CAD}=\dfrac{AC}{CD}$，又 AD 平分 $\angle BAC$，所以 $\sin\angle BAD=\sin\angle CAD$，又 $\sin\angle ADB=\sin\angle ADC$，所以 $\dfrac{AB}{BD}=\dfrac{AC}{CD}$，所以 $\dfrac{BD}{CD}=\dfrac{AB}{AC}=$

提示：$\angle ADB+\angle ADC=\pi$，所以正弦值相等

$\dfrac{2}{1+\sqrt{3}}$ $\left(\text{另解：由角平分线定理可得}\dfrac{BD}{CD}=\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{2}{1+\sqrt{3}}\right)$，且 $BD+CD=\sqrt{6}$，所以 $BD=\dfrac{2\sqrt{6}}{3+\sqrt{3}}=\sqrt{6}-\sqrt{2}$. 在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理得 $\cos\angle ABC=\dfrac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\cdot BC}=$

$\frac{4+6-(1+\sqrt{3})^2}{4\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$,在△$ABD$ 中,由余弦定理得 $\cos\angle ABD=\frac{AB^2+BD^2-AD^2}{2AB\cdot BD}=\frac{2^2+(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2-AD^2}{4(\sqrt{6}-\sqrt{2})}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$,解得 $AD=2$(舍负).

点拨:本题多次运用余弦定理和正弦定理,在计算 AD 时,不用 $\cos\angle BAD=\frac{AB^2+AD^2-BD^2}{2AB\cdot AD}$ 建立方程的原因是分子分母都出现了 AD,这样可以减少计算量

13.【解】(1)在△ABC 中,$A\in(0,\pi)$,

$\cos A=-\frac{1}{3}$,

又 $\sin^2 A+\cos^2 A=1$,∴ $\sin A=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

由正弦定理得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$,

∴ $a\sin C=c\sin A=4\sqrt{2}$,∴ $c=6$.

(2)选条件①.

∵ △ABC 中,$\cos A=-\frac{1}{3}<0$,∴ $A\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$.

∵ $a=c=6$,∴ △ABC 是等腰三角形,且 $A=C$,

此时△ABC 内角和大于 π,即△ABC 不存在,故不选条件①.

选条件②.

∵ $a\sin B=b\sin A=\frac{10\sqrt{2}}{3}$,$\sin A=\frac{2\sqrt{2}}{3}$,

∴ $b=5$.

由(1)知 $c=6$,则由余弦定理可得 $6^2+5^2-a^2=2\times5\times6\times\left(-\frac{1}{3}\right)$,

∴ $a=9$(负值舍去),

∴ $9\sin C=4\sqrt{2}$,∴ $\sin C=\frac{4\sqrt{2}}{9}$.

设 BC 边上的高为 h,∴ $h=b\sin C=5\times\frac{4\sqrt{2}}{9}=\frac{20\sqrt{2}}{9}$.

选条件③.

∵ $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=10\sqrt{2}$,$c=6$,

∴ $b=5$.

在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理得 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=-\frac{1}{3}$，

解得 $a=9$（负值舍去）.

设 BC 边上的高为 h，则 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ah=10\sqrt{2}$，

解得 $h=\frac{20\sqrt{2}}{9}$.

14.【解】（1）已知 $a^2+b^2-c^2=\sqrt{2}ab$，则有 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

又 $C\in(0,\pi)$，所以 $C=\frac{\pi}{4}$.

又 $\sin C=\sqrt{2}\cos B$，所以 $\cos B=\frac{\sin C}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$.

又 $B\in(0,\pi)$，所以 $B=\frac{\pi}{3}$.

（2）由（1）可得 $C=\frac{\pi}{4}$，$B=\frac{\pi}{3}$，由正弦定理，不妨令 $\frac{c}{\sin C}=\frac{b}{\sin B}=k\ (k>0)$，则有 $c=\frac{\sqrt{2}}{2}k$，$b=\frac{\sqrt{3}}{2}k$.

又 $S_{\triangle ABC}=3+\sqrt{3}$，

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}bc\sin(B+C)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}k\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}k(\sin B\cos C+\cos B\sin C)=\frac{\sqrt{6}}{8}k^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\sqrt{6}}{8}k^2\cdot\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=3+\sqrt{3}$，解得 $k=4$（负值舍去），故 $c=\frac{\sqrt{2}}{2}k=2\sqrt{2}$.

15.【解】（1）因为 $a\sin B=\sqrt{3}b\cos A$，

所以由正弦定理得 $\sin A\sin B=\sqrt{3}\sin B\cos A$，

因为 $B\in(0,\pi)$，$\sin B\neq0$，

所以 $\sin A=\sqrt{3}\cos A$，即 $\tan A=\sqrt{3}$，又 $A\in(0,\pi)$，

易错：根据三角函数值求角时，不要忽略角的范围

所以 $A=\frac{\pi}{3}$.

(2) 由(1)可知, $A=\frac{\pi}{3}$, 又 $a=\sqrt{7}$,

由余弦定理得 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1}{2}$,

即 $\frac{b^2+c^2-7}{bc}=1$, $b^2+c^2-7=bc$①,

又 $c-2b=1$②,

联立①②, 可得 $\begin{cases}c=3,\\ b=1,\end{cases}$

所以 c 的值为 3.

(3) 由(2)可知, $b=1$, 根据正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$, 得 $\frac{\sqrt{7}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{\sin B}$,

所以 $\sin B=\frac{\sqrt{21}}{14}<\frac{1}{2}$.

提示: 根据 $\sin B$ 的值和特殊角三角函数值, 确定 B 的范围, 为确定 $2B$ 的三角函数值奠定基础

又 $1<\sqrt{7}<3$, 即 $b<a<c$, 所以 $B\in\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$,

则 $\cos B=\sqrt{1-\sin^2 B}=\frac{5\sqrt{7}}{14}$.

$\sin 2B=2\sin B\cos B=2\times\frac{\sqrt{21}}{14}\times\frac{5\sqrt{7}}{14}=\frac{5\sqrt{3}}{14}$,

$\cos 2B=1-2\sin^2 B=1-2\times\frac{21}{14\times 14}=\frac{11}{14}$,

所以 $\sin(A+2B)=\sin A\cos 2B+\cos A\sin 2B=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{11}{14}+\frac{1}{2}\times\frac{5\sqrt{3}}{14}=\frac{4\sqrt{3}}{7}$.

16.【解】(1) 由 $\sin A+\sqrt{3}\cos A=2$, 得 $2\left(\frac{1}{2}\sin A+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A\right)=2$,

所以 $\sin\left(A+\frac{\pi}{3}\right)=1$.

由 $A\in(0,\pi)$, 得 $A+\frac{\pi}{3}\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right)$, 所以 $A+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$,

所以 $A=\frac{\pi}{6}$.

(2) 由 A,B,C 为三角形内角, 得 $\sin B\neq 0$, $\sin C\neq 0$.

因为 $\sqrt{2}b\sin C=c\sin 2B$,

所以由正弦定理得 $\sqrt{2}\sin B\sin C=\sin C\sin 2B$,

所以 $\sqrt{2}\sin B=\sin 2B$, 即 $\sqrt{2}\sin B=2\sin B\cos B$,所以 $\cos B=\frac{\sqrt{2}}{2}$,所以 $B=\frac{\pi}{4}$.

因为 $a=2, A=\frac{\pi}{6}$,所以由正弦定理,得 $b=\frac{a}{\sin A}\sin B=2\sqrt{2}$.

由 $A=\frac{\pi}{6}, B=\frac{\pi}{4}$,得 $C=\frac{7\pi}{12}$,所以 $\sin C=\sin\frac{7\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$,

所以由正弦定理,得 $c=\frac{a\sin C}{\sin A}=\frac{2\times\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}{\frac{1}{2}}=\sqrt{6}+\sqrt{2}$,

所以 $\triangle ABC$ 的周长为 $a+b+c=2+2\sqrt{2}+\sqrt{6}+\sqrt{2}=2+\sqrt{6}+3\sqrt{2}$.

素养上分

1. D 【解析】因为 $P(\sin\alpha,\cos\alpha)$, $Q(1,0)$,

所以 $\overrightarrow{OP}=(\sin\alpha,\cos\alpha)$, $\overrightarrow{OQ}=(1,0)$,

所以 $|\overrightarrow{OP}|=\sqrt{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=1$, $|\overrightarrow{OQ}|=1$, $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=\sin\alpha$,

所以 $\cos(P,Q)=\cos\langle\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OQ}\rangle=\frac{\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}}{|\overrightarrow{OP}|\cdot|\overrightarrow{OQ}|}=\sin\alpha$,

则 P,Q 的余弦距离为 $1-\sin\alpha=\frac{5+\sqrt{5}}{5}$,所以 $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{5}$,

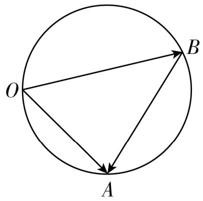
所以 $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha=1-2\times\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2=\frac{3}{5}$. 故选 D.

2. D 【解析】设 $\boldsymbol{m}=\overrightarrow{OA}$, $\boldsymbol{n}=\overrightarrow{OB}$, 则 $\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n}$,

因为 $|\boldsymbol{m}|=\sqrt{2}$, $(\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n})$ 与 $\boldsymbol{n}$ 的夹角为 $\frac{3\pi}{4}$,

所以在$\triangle OAB$中,$OA=\sqrt{2}$,$\angle OBA=\frac{\pi}{4}$,

如图所示,



由正弦定理得$\triangle OAB$外接圆的半径为

$\frac{OA}{2\sin\angle OBA}=1$,

则B为圆上与O,A不重合的动点,

设$\angle AOB=\theta\left(0<\theta<\frac{3\pi}{4}\right)$,

由正弦定理可得,$AB=2\sin\theta$,$OB=2\sin\left(\frac{3\pi}{4}-\theta\right)$,

所以$\boldsymbol{m}\odot\boldsymbol{n}=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\sin\theta=2S_{\triangle OAB}=AB\cdot OB\cdot\sin\frac{\pi}{4}=2\sqrt{2}\sin\theta\sin\left(\frac{3\pi}{4}-\theta\right)=2\sqrt{2}\sin\theta\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta\right)=2\sin\theta\cos\theta+2\sin^2\theta=\sin2\theta+1-\cos2\theta=\sqrt{2}\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{4}\right)+1$,

提示:二倍角的正弦、余弦公式,两角差的正弦公式

所以当$2\theta-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$,即$\theta=\frac{3\pi}{8}$时,$\boldsymbol{m}\odot\boldsymbol{n}$取得最大值,且最大值为$\sqrt{2}+1$. **故选 D.**

3. C 【解析】在$\mathrm{Rt}\triangle ACD$中,$AD=\frac{AC}{\sin83°}=\frac{1}{\cos7°}$(米),在$\triangle ABD$中,由正弦定理$\frac{BD}{\sin\angle BAD}=\frac{AD}{\sin\angle ABD}$,可得$\frac{BD}{\sin(83°-23°)}=\frac{AD}{\sin23°}$,解得$BD=\frac{\sqrt{3}}{2\sin23°\cos7°}$米,而$\sin30°=\sin(23°+7°)=\sin23°\cos7°+\cos23°\sin7°$,且$\sin16°=\sin(23°-7°)=\sin23°\cos7°-\cos23°\sin7°$,两式相加,得$2\sin23°\cos7°=\sin30°+\sin16°\approx0.776$,所以$BD\approx\frac{1.732}{0.776}\approx2.232$(米). **故 C 正确.**

4. D

思路导引 由已知可得 $\frac{PQ}{BP}+\frac{PQ}{CP}=1$，利用角平分线定理以及正弦定理可推出 $1=\frac{\sin\angle ABQ+\sin\angle PCQ}{\sin\angle PQC}=\frac{\sin\angle ABQ+\sin\angle PCQ}{\sin(60°+\angle ABQ)}$，化简可得 $\sin\angle PCQ=\sin(60°-\angle ABQ)$，即可求得答案.

【解析】如图，由题意可知 AP 为 $\angle BAC$ 的平分线，故 $\frac{PQ}{PB}=\frac{AQ}{AB}=\frac{\sin\angle ABQ}{\sin\angle AQB}$，$\frac{PQ}{PC}=\frac{\sin\angle PCQ}{\sin\angle PQC}$.

由 $\frac{1}{BP}+\frac{1}{CP}=\frac{1}{PQ}$，可得 $\frac{PQ}{BP}+\frac{PQ}{CP}=1$，

于是 $\frac{PQ}{PB}+\frac{PQ}{PC}=\frac{\sin\angle ABQ}{\sin\angle AQB}+\frac{\sin\angle PCQ}{\sin\angle PQC}$

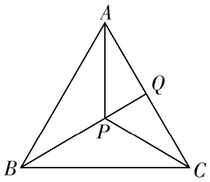
$=1=\frac{\sin\angle ABQ+\sin\angle PCQ}{\sin\angle PQC}$

$=\frac{\sin\angle ABQ+\sin\angle PCQ}{\sin(60°+\angle ABQ)}$，

即 $\sin\angle ABQ+\sin\angle PCQ=\sin(60°+\angle ABQ)$，化简可得 $\sin\angle PCQ=\sin(60°-\angle ABQ)$，

于是 $\angle PCQ=60°-\angle ABQ$ 或 $\angle PCQ+60°-\angle ABQ=180°$（舍去），

故 $\angle BPC=\angle PQC+\angle PCQ=\angle ABQ+\angle BAC+\angle PCQ=120°$. **故选** D.



5. **思路导引** 根据正弦定理边换角，再联立方程组解出内角 A,B 的正弦值和余弦值，最后利用两角和的余弦公式求出 $\cos C$ 即可判断.

【解】由正弦定理得 $1=\frac{\sin C}{\sin C}=\frac{\cos B}{2\sin A}=\frac{\cos A}{3\sin B}$，

因为 A，B，C 为三角形内角，所以 $\begin{cases}\cos B=2\sin A>0①,\\ \cos A=3\sin B>0②,\end{cases}$ 则 A，B 均为锐角，

②式平方得 $\cos^2A=9\sin^2B$，即 $1-\sin^2A=9(1-\cos^2B)$，

将①代入得，$1-\sin^2A=9(1-4\sin^2A)$，

所以 $\sin^2A=\frac{8}{35}$，

所以 $\sin A=\sqrt{\frac{8}{35}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{35}}$，

所以 $\cos A=\sqrt{1-\sin^2A}=\sqrt{\frac{27}{35}}=\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{35}}$，

提示：$\sin^2A+\cos^2A=1$

所以 $\cos B=2\sin A=\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{35}}$，$\sin B=\frac{1}{3}\cos A=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{35}}$，

$\cos C=-\cos(A+B)=\sin A\sin B-\cos A\cos B=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{35}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{35}}-\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{35}}\times\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{35}}=-\frac{2\sqrt{6}}{7}<0$，故 $\triangle ABC$ 为钝角三角形.

第六章　全章上分

1. C　【解析】$\because |\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=2$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2$，$\therefore |\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}=\sqrt{2^2+2^2-2\times2}=2$. **故 C 正确.**

2. B　【解析】连接 AD（图略），由 B,D,C 三点共线，D 是 BC 的中点，得 $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

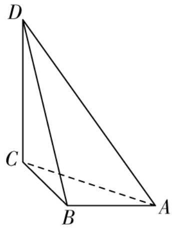
令 $\overrightarrow{AN}=x\overrightarrow{AC}$，由 M,D,N 三点共线，B 是 AM 的中点，可设 $\overrightarrow{AD}=y\overrightarrow{AM}+(1-y)\overrightarrow{AN}=2y\overrightarrow{AB}+x(1-y)\overrightarrow{AC}$.

则有 $\begin{cases}2y=\frac{1}{2},\\ x(1-y)=\frac{1}{2},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=\frac{2}{3},\\ y=\frac{1}{4}.\end{cases}$

所以 $\overrightarrow{AN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$，则 $\overrightarrow{AN}=2\overrightarrow{NC}$，$\frac{AN}{NC}=2$. **故选 B.**

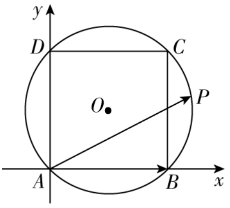
3. D　【解析】$\because \cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$，$\therefore \cos A+\cos B=\frac{a+b}{c}$ 即 $\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{a+b}{c}$，则 $a(b^2+c^2-a^2)+b(a^2+c^2-b^2)=2ab(a+b)$，则 $ab(a+b)=c^2(a+b)-(a+b)(a^2-ab+b^2)$，则 $ab=c^2-a^2-b^2+ab$，则 $c^2=a^2+b^2$，则 $\triangle ABC$ 一定是直角三角形. **故 D 正确.**

4. D　【解析】依题意可得图形如图所示，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=30°$，$\angle ACB=75°-30°=45°$，$AB=20$，由正弦定理得 $\frac{BC}{\sin 30°}=\frac{20}{\sin 45°}$，解得 $BC=\frac{20\times\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=10\sqrt{2}$，在 Rt$\triangle BCD$ 中，$\angle DBC=30°$，所以 $CD=BC\cdot\tan 30°=10\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{10\sqrt{6}}{3}$. 所以树的高度为$\frac{10\sqrt{6}}{3}$米. **故 D 正确.**



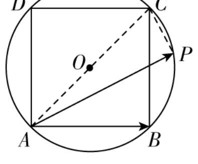
5. C　【解析】如图①，以 A 为坐标原点，AB,AD 所在直线分别为 x 轴、y 轴，建立平面直角坐标系，则 $A(0,0)$，$B(1,0)$. 设 $P(x,y)$，则 $\overrightarrow{AP}=(x,y)$. 因为 $\overrightarrow{AB}=(1,$

0)，所以 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=x$. 由题意知，圆 O 的半径 $r=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 因为点 P 在 $\overset{\frown}{BC}$（包括端点）上，所以 $1\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}$ 的取值范围是 $\left[1,\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right]$. **故 C 正确.**



图①

一题多解 如图②，连接 AC，CP. 易知 $\angle BAC=\frac{\pi}{4}$，设 $\angle PAB=\theta$，$0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}$，则 $\angle PAC=\frac{\pi}{4}-\theta$. 由已知可得 $|\overrightarrow{AB}|=1$，$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{2}$，$\angle APC=\frac{\pi}{2}$，所以 $|\overrightarrow{AP}|=|\overrightarrow{AC}|\cos\angle PAC=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)$，所以 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AP}||\overrightarrow{AB}|\cos\theta=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)\cos\theta=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta\right)\cdot\cos\theta=(\cos\theta+\sin\theta)\cdot\cos\theta=\cos^2\theta+\sin\theta\cos\theta=\frac{1+\cos 2\theta}{2}+\frac{\sin 2\theta}{2}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{4}\right)$. 因为 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}$，所以 $\frac{\pi}{4}\leqslant 2\theta+\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{3\pi}{4}$，所以 $\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{4}\right)\leqslant 1$，所以 $1\leqslant\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{4}\right)\leqslant\frac{1+\sqrt{2}}{2}$，即 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}$ 的取值范围是 $\left[1,\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right]$. **故 C 正确.**



图②

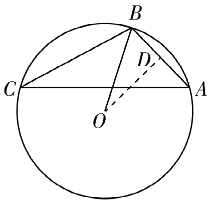
6. A 【解析】在$\triangle ABC$中，由余弦定理及$b\cos A+a\cos B=2$，可得$b\times\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+a\times\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=2$，解得$c=2$. 由$\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CA}$，得$(\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC})^2=\overrightarrow{CA}^2$，即$c^2+a^2-2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=b^2$，又$a=3,b=4,c=2$，所以$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=-\frac{3}{2}$. 如图，取$AB$的中点$D$，连接$OD$，则$OD\perp AB$，则$\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{BA}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{BA}|^2=2$，同理可得$\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{BC}|^2=\frac{9}{2}$，

而$\overrightarrow{BO}=x\overrightarrow{BA}+y\overrightarrow{BC}$，

则有$\begin{cases}\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{BA}=x\overrightarrow{BA}^2+y\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC},\\ \overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{BC}=x\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}+y\overrightarrow{BC}^2,\end{cases}$

即$\begin{cases}4x-\frac{3}{2}y=2,\\ -\frac{3}{2}x+9y=\frac{9}{2},\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x=\frac{11}{15},\\ y=\frac{28}{45},\end{cases}$

则$x+y=\frac{61}{45}$. **故 A 正确.**



7. D 【解析】$AB=2,AC=5,\angle BAC=60°$，在$\triangle ABC$中，由余弦定理可得$BC=\sqrt{AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos\angle BAC}=\sqrt{4+25-2\times2\times5\cos 60°}=\sqrt{19}$.

因为$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，所以$|\overrightarrow{AM}|=\sqrt{\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AC}^2+2|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos\angle BAC)}=\sqrt{\frac{1}{4}\times\left(4+25+2\times2\times5\times\frac{1}{2}\right)}=\frac{\sqrt{39}}{2}$. 由余弦定理可得$\cos\angle ABC=\frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\cdot BC}=\frac{4+19-25}{2\times2\times\sqrt{19}}=-\frac{1}{2\sqrt{19}}$.

由$\overrightarrow{BN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})$，可得$|\overrightarrow{BN}|=\sqrt{\frac{1}{4}(\overrightarrow{BA}^2+\overrightarrow{BC}^2+2|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|\cos\angle ABC)}=\sqrt{\frac{1}{4}\left[4+19+2\times2\times\sqrt{19}\times\left(-\frac{1}{2\sqrt{19}}\right)\right]}=$

$\frac{\sqrt{21}}{2}$. 由重心的性质可得 $AP=\frac{2}{3}AM=\frac{\sqrt{39}}{3}$, $BP=\frac{2}{3}BN=\frac{\sqrt{21}}{3}$.

在$\triangle APB$中，由余弦定理可得$\cos\angle APB=\frac{AP^2+BP^2-AB^2}{2AP\cdot BP}=\frac{\frac{39}{9}+\frac{21}{9}-4}{2\cdot\frac{\sqrt{39}}{3}\cdot\frac{\sqrt{21}}{3}}=\frac{4\sqrt{91}}{91}$. **故 D 正确.**

8. A 【解析】设正八边形 $ABCDEFGH$ 的中心为 O，连接 OA,OB,OH（图略），$OA=a$，在$\triangle OAB$中，$\angle AOB=\frac{\pi}{4}$，$OA=OB=a$，由余弦定理得 $2a^2-2a^2\cos\frac{\pi}{4}=(2\sqrt{2-\sqrt{2}})^2$，解得 $a=2$（舍负）. 在$\triangle OBH$中，$\angle BOH=\frac{\pi}{2}$，由勾股定理得 $BH^2=8$，所以 $BH=2\sqrt{2}$，所以 $S_{\triangle BEH}=\frac{1}{2}BH\cdot(2+\sqrt{2})=2+2\sqrt{2}$. 设 $|\overrightarrow{PE}|=m$，$|\overrightarrow{PB}|=n$，$|\overrightarrow{PH}|=t$，因为 $\angle EPH=\angle BPH=\angle BPE=\frac{2\pi}{3}$，所以 $S_{\triangle BEH}=S_{\triangle PEH}+S_{\triangle PBH}+S_{\triangle PBE}=\frac{\sqrt{3}}{4}(mt+nt+mn)=2+2\sqrt{2}$，所以 $mt+nt+mn=\frac{8(1+\sqrt{2})}{\sqrt{3}}=\frac{8(\sqrt{3}+\sqrt{6})}{3}$，所以 $\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{PH}+\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PH}+\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PE}=-\frac{1}{2}(mt+nt+mn)=-\frac{4(\sqrt{3}+\sqrt{6})}{3}$. **故 A 正确.**

9. ABD 【解析】若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta=0$，所以 $\tan\theta=-\sqrt{3}$，**故 A 正确**；$f(\theta)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta=2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$，所以当 $\theta+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$，即 $\theta=\frac{\pi}{6}$时，$f(\theta)$取得最大值 2，**故 B 正确**；因为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(\sqrt{3}+\cos\theta,\sin\theta+1)$，所以 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{(\sqrt{3}+\cos\theta)^2+(\sin\theta+1)^2}=\sqrt{5+4\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)}$，所以当 $\theta=\frac{\pi}{6}$时，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$取得最大值，最大值为 3，**故 C 错误**；$\boldsymbol{b}$

在 a 上的投影向量为$\frac{a\cdot b}{|a|}\cdot\frac{a}{|a|}=-\frac{\sqrt{3}}{3}a$，

所以 $\frac{a\cdot b}{|a|^2}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以 $\cos\langle a,b\rangle=$

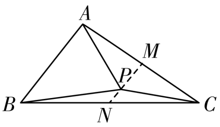
$\frac{a\cdot b}{|a||b|}=\frac{\sqrt{6}}{2}\times\frac{a\cdot b}{|a|^2}=\frac{\sqrt{6}}{2}\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，

又 $0\leqslant\langle a,b\rangle\leqslant\pi$，所以$\langle a,b\rangle=\frac{3\pi}{4}$，**故 D 正确.**

10. ACD 【解析】由 P 为$\triangle ABC$ 的垂心，可得$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AC}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP})\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=3$，**故 A 正确；**

如图①，设 AC 的中点为 M，BC 的中点为 N，连接 PM，PN，则 $\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB}+3\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC}+2\overrightarrow{PB}+2\overrightarrow{PC}=2\overrightarrow{PM}+4\overrightarrow{PN}=\mathbf{0}$，即 $\overrightarrow{PM}=-2\overrightarrow{PN}$，所以点 P 为中位线 MN 上靠近点 N 的三等分点，所以$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ABP}}=\frac{S_{\triangle ABC}}{\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}}=2$

（**另解：**由奔驰定理得 $S_{\triangle PBC}:S_{\triangle PAC}:S_{\triangle PAB}=1:2:3$，所以 $S_{\triangle ABC}:S_{\triangle PAB}=6:3=2:1$），**故 B 错误；**

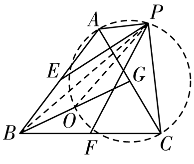


图①

设 BC 的中点为 H，则 $\overrightarrow{AH}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，

结合题设得 $\overrightarrow{HP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AP}-\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|\cos B}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|\cos C}$，所以 $\overrightarrow{HP}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{AB}|\cos B}+\frac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{AC}|\cos C}=-|\overrightarrow{BC}|+|\overrightarrow{BC}|=0$，所以 $HP\perp BC$，又 BC 的中点为 H，所以 P 在 BC 的垂直平分线上，所以动点 P 的轨迹经过$\triangle ABC$ 的外心，**故 C 正确；**

D 选项，如图②，设 BG 的中点为 O，



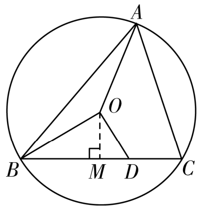
图②

因为 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}=0$，所以点 P 的轨迹是以

AC 为直径的圆，连接 BP,PO，则 $\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{PF}=(\overrightarrow{BE}-\overrightarrow{BP})\cdot(\overrightarrow{BF}-\overrightarrow{BP})=\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BP}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BP}\right)=\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BG}+\frac{1}{2}\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{BP}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BG}-\frac{1}{2}\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{BP}\right)=\left(\overrightarrow{BO}+\frac{1}{2}\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{BP}\right)\cdot\left(\overrightarrow{BO}-\frac{1}{2}\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{BP}\right)=\left(\overrightarrow{PO}+\frac{1}{2}\overrightarrow{GA}\right)\cdot\left(\overrightarrow{PO}-\frac{1}{2}\overrightarrow{GA}\right)=|\overrightarrow{PO}|^2-\frac{1}{4}$ （**另解**：连接 EF（图略），易知 $EF=1$，且 O 为 EF 的中点，则由极化恒等式可直接得到 $\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{PF}=|\overrightarrow{PO}|^2-\frac{1}{4}|\overrightarrow{EF}|^2=|\overrightarrow{PO}|^2-\frac{1}{4}$），故当 PO 为直径，即 $PO=2$ 时，$\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{PF}$ 有最大值 $4-\frac{1}{4}=\frac{15}{4}$，**故 D 正确**.

11. ABD 【**解析**】对于 A，$\because BD=2DC=2$，$\therefore BC=2+1=3$，由正弦定理得 $\frac{BC}{\sin\angle BAC}=2R$，$\therefore \sin\angle BAC=\frac{BC}{2R}=\frac{3}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，又 $0°<\angle BAC<90°$，$\therefore \angle BAC=60°$，**故 A 正确**；

对于 B，如图，过 O 作 $OM\perp BC$，垂足为 M，则 M 为 BC 的中点，$\therefore BM=\frac{3}{2}$，$\therefore OM=\sqrt{OB^2-BM^2}=\sqrt{3-\frac{9}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\therefore OD=\sqrt{OM^2+DM^2}=\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}=1$，$\therefore OB^2+OD^2=3+1=4=BD^2$，即 $OB\perp OD$，$\therefore \triangle BOD$ 为直角三角形，**故 B 正确**；



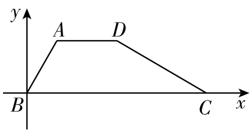
对于 C，由正弦定理知 $\frac{AB}{\sin C}=\frac{AC}{\sin\angle ABC}=2R=2\sqrt{3}$，$\therefore AB=2\sqrt{3}\sin C$，$AC=2\sqrt{3}\cdot\sin\angle ABC$，$\therefore \triangle ABC$ 的周长为 $AC+AB+BC=2\sqrt{3}\sin\angle ABC+2\sqrt{3}\sin C+3=2\sqrt{3}\sin(120°-C)+2\sqrt{3}\sin C+3=3\cos C+\sqrt{3}\sin C+2\sqrt{3}\sin C+3=3\cos C+3\sqrt{3}\sin C+$

$3=6\sin(C+30°)+3$，在锐角三角形 ABC 中，$\begin{cases}0°<C<90°,\\0°<\angle ABC=120°-C<90°,\end{cases}$ 解得 $30°<C<90°$，$\therefore 60°<C+30°<120°$，$\therefore \frac{\sqrt{3}}{2}<\sin(C+30°)\leqslant 1$，$\therefore 3\sqrt{3}+3<6\sin(C+30°)+3\leqslant 9$，**故 C 错误**；

对于 D，由 C 可知，$AB=2\sqrt{3}\sin C$，$30°<C<90°$，$\therefore \sin C\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，$\therefore AB\in(\sqrt{3},2\sqrt{3})$，$\therefore \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2\in\left(\frac{3}{2},6\right)$，**故 D 正确.**

12. $\frac{1}{3}$　【解析】因为 D 是 AC 的中点，所以 $\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})$，所以 $\overrightarrow{BD}^2=\frac{1}{4}(\overrightarrow{BA}^2+\overrightarrow{BC}^2+2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC})=\frac{1}{4}\left(c^2+a^2+2\times c\times a\times\frac{1}{2}\right)=\frac{13}{4}$，即 $a^2+c^2+ac=13$. 又 $c=a+2$，所以 $a^2+(a+2)^2+a(a+2)=13$，解得 $a=1$（负值舍去），所以 $c=3$. 由 D 是 AC 的中点，可知 $S_{\triangle ABD}=S_{\triangle CBD}$，即 $\frac{1}{2}AB\cdot BD\cdot\sin\angle ABD=\frac{1}{2}BC\cdot BD\sin\angle CBD$，所以 $\frac{\sin\angle ABD}{\sin\angle CBD}=\frac{BC}{AB}=\frac{a}{c}=\frac{1}{3}$.

13. $\frac{1}{3}$　$\frac{3}{4}$　【解析】建立以 B 点为坐标原点的平面直角坐标系，如图，则 $B(0,0)$，$A(1,\sqrt{3})$，$C(6,0)$.



设 $D(x,\sqrt{3})$，由 $\overrightarrow{AD}=\lambda\overrightarrow{BC}=\lambda(6,0)=(6\lambda,0)$，得 $x=6\lambda+1$. 因为 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=-2$，$\overrightarrow{AB}=(-1,-\sqrt{3})$，所以 $(6\lambda,0)\cdot(-1,-\sqrt{3})=-6\lambda=-2$，所以 $\lambda=\frac{1}{3}$，所以 $D(3,\sqrt{3})$.

①当 M 在 N 的左侧时，设 $M(x_M,0)$，$x_M\in[0,5]$，则 $N(x_M+1,0)$，则 $\overrightarrow{AM}=$

$(x_M-1,-\sqrt{3})$, $\overrightarrow{DN}=(x_M-2,-\sqrt{3})$，则 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{DN}=x_M^2-3x_M+5$，所以 $(\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{DN})_{\min}=\frac{11}{4}$；

②当 M 在 N 的右侧时，设 $N(x_N,0)$，$x_N\in[0,5]$，则 $M(x_N+1,0)$，则 $\overrightarrow{AM}=(x_N,-\sqrt{3})$，$\overrightarrow{DN}=(x_N-3,-\sqrt{3})$，则 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{DN}=x_N^2-3x_N+3$，所以 $(\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{DN})_{\min}=\frac{3}{4}$.

综上，$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{DN}$ 的最小值为 $\frac{3}{4}$.

14. $2\sqrt{3}$ **【解析】**在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理得 $\cos B=\frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\cdot BC}$，即 $-\frac{1}{2}=\frac{8+BC^2-AC^2}{2\times2\sqrt{2}\times BC}$，可得 $BC^2-AC^2=-2\sqrt{2}BC-8$①.

在 $\triangle ACD$ 中，由余弦定理得 $\cos D=\frac{AD^2+CD^2-AC^2}{2AD\cdot CD}$，即 $\frac{1}{2}=\frac{8+CD^2-AC^2}{2\times2\sqrt{2}\times CD}$，可得 $CD^2-AC^2=2\sqrt{2}CD-8$②.

因为 $S_1=\frac{1}{2}AB\cdot BC\cdot\sin B=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times BC\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}BC$，$S_2=\frac{1}{2}AD\cdot CD\cdot\sin D=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times CD\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}CD$，所以 $S_2-S_1=\frac{\sqrt{6}}{2}CD-\frac{\sqrt{6}}{2}BC=\frac{\sqrt{6}}{2}(CD-BC)$③.

由②−①得 $CD^2-AC^2-BC^2+AC^2=2\sqrt{2}CD-8+2\sqrt{2}BC+8$，可得 $CD^2-BC^2=2\sqrt{2}(CD+BC)$，可得 $(CD+BC)(CD-BC)=2\sqrt{2}(CD+BC)$，因为 $CD+BC>0$，所以 $CD-BC=2\sqrt{2}$，代入③得 $S_2-S_1=\frac{\sqrt{6}}{2}(CD-BC)=\frac{\sqrt{6}}{2}\times2\sqrt{2}=2\sqrt{3}$.

15.【解】(1)连接 BE(图略)，因为在矩形 $ABCD$ 中，F 为 CD 的中点，E 为 AD 上靠近点 A 的三等分点，所以 $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$. 因为 $\overrightarrow{EG}=\lambda\overrightarrow{GF}$，所以 $\overrightarrow{BG}-\overrightarrow{BE}=\lambda(\overrightarrow{BF}-\overrightarrow{BG})$，可得 $(1+\lambda)\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{BE}+\lambda\overrightarrow{BF}$. 根据点 G 在

BD 上，设 $\overrightarrow{BG}=k\overrightarrow{BD}=k(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})(0<k<1)$，所以$(1+\lambda)k\cdot(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})=\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}+\lambda\left(\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}\right)=\left(1+\frac{1}{2}\lambda\right)\overrightarrow{BA}+\left(\frac{1}{3}+\lambda\right)\overrightarrow{BC}$，可得$\begin{cases}(1+\lambda)k=1+\frac{1}{2}\lambda,\\(1+\lambda)k=\frac{1}{3}+\lambda,\end{cases}$解得 $\lambda=\frac{4}{3},k=\frac{5}{7}$.

(2)因为 $AB\perp BC$，所以 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=0$，由(1)的结论，可得 $\overrightarrow{BG}=\frac{5}{7}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})$，$\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$，所以 $\overrightarrow{BG}\cdot\overrightarrow{BF}=\frac{5}{7}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})\cdot\left(\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}\right)=\frac{5}{7}\left(\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}^2+\overrightarrow{BC}^2+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}\right)=\frac{5}{7}\times\left(\frac{1}{2}+4\right)=\frac{45}{14}$.

16.【解】(1)因为$\frac{b}{c-a}+\frac{c}{b-a}=1$，所以 $b(b-a)+c(c-a)=(c-a)(b-a)$，所以 $b^2-ab+c^2-ac=bc-ac-ab+a^2$，即 $b^2+c^2-a^2=bc$. 由余弦定理可得 $b^2+c^2-a^2=2bc\cos A$，所以 $\cos A=\frac{1}{2}$. 因为 $A\in(0,\pi)$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$.

(2)设△ABC 的外接圆半径为 r，则 $\pi r^2=\frac{7\pi}{3}$，解得 $r=\frac{\sqrt{21}}{3}$，由正弦定理得$\frac{a}{\sin A}=2r$，$a=2r\sin A=2\times\frac{\sqrt{21}}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{7}$，因为 $\sin B+\sin C=\frac{5\sqrt{7}}{7}\sin A$，所以由正弦定理得 $b+c=\frac{5\sqrt{7}}{7}a=5$，由(1)知 $b^2+c^2-a^2=bc$，所以$(b+c)^2-7=3bc$，得 $3bc=25-7=18$，则 $bc=6$，所以△ABC 的面积 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times6\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

17.【解】选择条件①：(1)由余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，即 $a^2-b^2=49-14b\times\left(-\frac{1}{7}\right)=49+2b$，$\therefore (a+b)(a-b)=49+2b$. $\because a+b=11$，$\therefore 11a-11b=49+2b$，即

$11a-13b=49.$

联立$\begin{cases}a+b=11,\\11a-13b=49,\end{cases}$解得 $a=8,b=3.$

(2)在$\triangle ABC$中,$\sin A>0,\cos A=-\dfrac{1}{7}$,

$\therefore \sin A=\sqrt{1-\cos^2A}=\dfrac{4\sqrt{3}}{7}$,

由正弦定理可得$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$,

$\therefore \sin C=\dfrac{c\sin A}{a}=\dfrac{7\times\dfrac{4\sqrt{3}}{7}}{8}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

$\therefore S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}\times8\times3\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}.$

选择条件②:(1)在$\triangle ABC$中,$\sin A>0$,$\sin B>0,\cos A=\dfrac{1}{8},\cos B=\dfrac{9}{16}$,$\therefore \sin A=\sqrt{1-\cos^2A}=\dfrac{3\sqrt{7}}{8}$, $\sin B=\sqrt{1-\cos^2B}=\dfrac{5\sqrt{7}}{16}$,

由正弦定理可得$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$,

$\therefore \dfrac{a}{b}=\dfrac{\sin A}{\sin B}=\dfrac{6}{5}$,$\because a+b=11$,$\therefore a=6$,$b=5.$

(2)在$\triangle ABC$中,$C=\pi-(A+B)$,$\therefore \sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B=\dfrac{3\sqrt{7}}{8}\times\dfrac{9}{16}+\dfrac{1}{8}\times\dfrac{5\sqrt{7}}{16}=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$,$\therefore S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}\times6\times5\times\dfrac{\sqrt{7}}{4}=\dfrac{15\sqrt{7}}{4}.$

18.【解】(1)在$\triangle ABC$中,由余弦定理得

$BC^2=AC^2+AB^2-2AC\cdot AB\cos\dfrac{\pi}{3}=100^2+200^2-2\times100\times200\times\dfrac{1}{2}=30\ 000$,所以$BC=100\sqrt{3}$米.

(2)因为$\angle ADB=\dfrac{\pi}{3}$,所以$\angle DAB\in\left(0,\dfrac{2\pi}{3}\right)$.记$\angle DAB=\theta$,由正弦定理得$\dfrac{AB}{\sin\angle ADB}=\dfrac{BD}{\sin\angle DAB}=\dfrac{AD}{\sin\angle ABD}$,即$\dfrac{200}{\sin\dfrac{\pi}{3}}=\dfrac{BD}{\sin\theta}=\dfrac{AD}{\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}-\theta\right)}$,所以$BD=$

$\frac{400\sqrt{3}}{3}\sin\theta$, $AD=\frac{400\sqrt{3}}{3}\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\theta\right)$，所以 $AD+2BD=\frac{400\sqrt{3}}{3}\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\theta\right)+\frac{800\sqrt{3}}{3}\sin\theta=\frac{400\sqrt{3}}{3}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\frac{5}{2}\sin\theta\right)=\frac{400\sqrt{21}}{3}\cdot\sin(\theta+\varphi)$，其中 $\tan\varphi=\frac{\sqrt{3}}{5}<\frac{\sqrt{3}}{3}=\tan\frac{\pi}{6}$，所以 $\varphi\in\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$，所以 $\theta+\varphi\in\left(0,\frac{5\pi}{6}\right)$，所以当 $\theta+\varphi=\frac{\pi}{2}$ 时，$\sin(\theta+\varphi)=1$，$AD+2BD$ 取得最大值 $\frac{400\sqrt{21}}{3}$ 米，即游客所走路程的最大值为 $\frac{400\sqrt{21}}{3}$ 米.

19.【解】(1) ∵ $\frac{a-c}{b-\sqrt{2}c}=\frac{\sin(A+C)}{\sin A+\sin C}$，

∴ $\frac{a-c}{b-\sqrt{2}c}=\frac{\sin B}{\sin A+\sin C}$，∴ 根据正弦定理可得 $\frac{a-c}{b-\sqrt{2}c}=\frac{b}{a+c}$，∴ $a^2-c^2=b^2-\sqrt{2}bc$，

∴ $b^2+c^2-a^2=\sqrt{2}bc$，∴ $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 又 $A\in(0,\pi)$，∴ $A=\frac{\pi}{4}$.

(2) 设 $\triangle ABC$ 外接圆的半径为 r，∵ $a=\sqrt{2}$，∴ 根据正弦定理可得 $2r=\frac{a}{\sin\angle BAC}=\frac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=2$，∴ $r=1=|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|$. 又 $\angle AOB=2\angle ACB$，$\angle AOC=2\angle ABC$，$\angle BOC=2\angle BAC=\frac{\pi}{2}$，∴ $|3\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}|^2=9+4+1+12\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+6\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}+4\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=14+12\cos\angle AOB+6\cos\angle AOC+4\cos\angle BOC=14+12\cos(2\angle ACB)+6\cos(2\angle ABC)=14+12\cos\left[2\left(\frac{3\pi}{4}-\angle ABC\right)\right]+6\cos(2\angle ABC)=14-12\sin(2\angle ABC)+6\cos(2\angle ABC)=14-6\sqrt{5}\sin(2\angle ABC-\varphi)$，

其中 $\tan\varphi=\frac{1}{2}<\frac{1}{\sqrt{3}}=\tan\frac{\pi}{6}$，易知 $2\angle ABC\in\left(0,\frac{3\pi}{2}\right)$，又 $\varphi\in\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$，

$\therefore 2\angle ABC-\varphi\in\left(-\frac{\pi}{6},\frac{3\pi}{2}\right)$，$\therefore$ 当 $2\angle ABC-\varphi=\frac{\pi}{2}$ 时，$\sin(2\angle ABC-\varphi)=1$，

$|3\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}|^2$ 取得最小值 $14-6\sqrt{5}$，

$\therefore |3\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}|$ 的最小值为 $\sqrt{14-6\sqrt{5}}=3-\sqrt{5}$.

(3)在(2)的条件下可得 $a=\sqrt{2}$，$\triangle ABC$ 外接圆的半径 $r=1$，$\angle BOC=\frac{\pi}{2}$，

$\therefore \triangle BOC$ 是直角边为 1 的等腰直角三角形. 设 BC 的中点为 F，则 $OF=FC=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}a=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 又 P 为 $\triangle ABC$ 外接圆 O 上一动点，$\therefore \overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}=(\overrightarrow{PF}+\overrightarrow{FB})\cdot(\overrightarrow{PF}+\overrightarrow{FC})=(\overrightarrow{PF}-\overrightarrow{FC})\cdot(\overrightarrow{PF}+\overrightarrow{FC})=\overrightarrow{PF}^2-\overrightarrow{FC}^2=\overrightarrow{PF}^2-\frac{1}{2}$，$\therefore$ 当 PF 最大时，$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}$ 取得最大值，而 PF 最大时，$PF\perp BC$，$\therefore PF$ 最大为 $r+OF=1+\frac{\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore \overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}$ 的最大值为 $\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\frac{1}{2}=\sqrt{2}+1$.